

مقاومة المواد / 1 /

منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة المعمارية



مقاومة المواد

الدكتور المهندس

رياض العيسى

أستاذ في قسم الهندسة الإنشائية

الدكتور المهندس

مروان البشير

أستاذ مساعد في قسم الهندسة الإنشائية

جامعة دمشق

1439–1438 هـ

2017–2016 م





الفهرس

الموضـــوع **رقم الصفحة**

الفصل الأول
علـم مقاومة المواد

الفصل الثاني

الشد والضغط لعنصر مستقيم

الفصل الثالث

الحالة الاجهادية المستوية والفراغية

الفصل الرابع

الانعطاف البسيط

الفصل الخامس

الخط المرن لعنصر مستقيم

الفصل السادس

الخواص الهندسية للمقاطع

الملحــق

- الحروف الهجائية الإغريقية
- بادئات النظام الدولي للوحدات
- رموز وحدات القياس في الجملتين المكثية و العالمية
- العلاقة بين النظام المتري والدولي
- الميزات الهندسية لبعض المقاطع المستوية
- المواصفات والمميزات الهندسية لبعض المقاطع المسحوبة
- دليل المصطلحات العلمية
- المراجع العلمية والأجنبية



المقدمــة

تعد مقاومة المواد من الأركان الأساسية التي يستند إليها الكيان العلمي فعن طريقها تتم معرفة سلوك الجمل الإنشائية أو العناصر، تحت تأثير الحمولات الخارجية ، وتحديد القوى الداخلية والإجهادات والتشوهات في المقاطع العرضية لهذه العناصر .

وهي عدا عن ذلك المدخل الأساسي للعلوم الأخرى فعند دراسة أي منشأ من الضروري اختيار طريقة اقتصادية محددة ودقيقة ، وتحسين الخواص الفيزيائية والميكانيكية للمواد ، التي ستكون دائماً العامل الأساسي والرئيسي في الإنشاء ، وهذا لايمكن أن يتم إلا بالمعرفة المعمقة لعلم مقاومة المواد .

وتشمل محتويات الكتاب ما يلي :

مبادىء علم مقاومة المواد ، الشد والضغط لعنصر مستقيم ، الحالة الإجهادية المستوية في نقطة ، الانعطاف البسيط ، الخط المرن لعنصر مستقيم ، المميزات الهندسية في المقاطع المستوية

وقد أغنينا كل بحث بعدد من الأمثلة والمسائل العملية التطبيقية المستقاة من الحياة الواقعية في المجالات الهندسية ، لتدعم العلاقات والاستنتاجات النظرية من أجل توضيح الدراسة النظرية لكتاب مقاومة المواد.

ونضع هذا الكتاب بين أيدي إخوتنا الطلبة وزملائنا المهندسين آملين أن نكون قد ساهمنا من خلاله في تقديم الفائدة المرجوة .

والله الموفق



الفصل الأول

المفاهيم الأساسية لعلم مقاومة المواد

1-1 علم مقاومة المواد

إن تصميم وتنفيذ الأبنية والمنشآت المعرضة لقوى مختلفة يعتمد قبل كل شيء على اختيار المادة والأبعاد العرضية المستخدمة، لكي تحقق المقاومة والقساوة من جهة ، والاقتصاد في مواد البناء وتخفيف الوزن الذاتي من جهة أخرى ، ولكي تتمكن هذه المنشآت من أن تتحمل الحمولات الخارجية المطبقة عليها دون أن تتحطم أو تتشوه بشدة ، يجب أن تُصنع من المواد المناسبة ، وبالمقاييس المناسبة ، وتتحدد هذه المقاييس بالحساب , يسمى العلم الذي يدرس أسس و مبادىء حساب متانة العناصر والتصاميم بعلم مقاومة المواد. إن تحديد مقاييس الجسم المصمم يتم مع أخذ خواص المادة المقترحة ليصمم الجسم منها . وكي يتم اختيار المادة بالشكل منطقي واستخدام خواصها بالشكل كامل ، يجب أن تتوفر معلومات شاملة عن خواص مختلف مواد البناء (الفولاذ ، الحديد الصلب ، الخشب ، البيتون.........إلخ) والأهم من ذلك المعلومات ، التي تحدد متانة المادة أي قدرتها على مقاومة الحمولات الخارجية دون أن تتحطم وتدرس هذه المواضيع في علم الميكانيك النظري ، ومقاومة المواد ، وحساب الإنشاءات ، ونظرية المرونة واللدونة.

فعلم حساب الإنشاءات هو العلم الذي يحدد الطرق الحسابية للجمل الإنشائية غير المقررة ستاتيكياً مثل الإطارات – الجوائز – الأقواس وغير ذلك ، ولكن عند تصميم العناصر المستقلة لهذه الجمل على المتانة والصلابة والاستقرار فإننا نستند إلى صيغ ومعادلات مقاومة المواد .

يختلف علم مقاومة المواد عن نظرية المرونة و اللدونة بأنه يدرس المواضيع بالشكل مبسط على عناصر إنشائية غير معقدة (قضيب ، جائز ، صفيحة) ، بينما نظرية المرونة تدرس العلاقة بين القوى الخارجية والقوى الداخلية والتشوهات ، أي أن المواضيع التي يدرسها علم مقاومة المواد ذاتها ، إلا أنها تدرس هذه المواضيع بعمق أكثر، وبفرضيات أكثر تطابقاً مع

الواقع من تلك التي تستخدم في مقاومة المواد ، وتكون هذه الدراسة أكثر تعقيداً ، وتستعمل الرياضيات بالشكل أوسع .

وتُستخدم عادة دراسات نظرية المرونة لتدقيق نتائج مقاومة المواد ، وقلما تُستخدم في دراسة المسائل الهندسية العملية .

وندرس في علم مقاومة المواد سلوك العناصر الإنشائية وتشوهاتها تحت تأثير الحمولات العادية عبر جميع مراحل تحميل هذه العناصر وحتى انهيارها ، بحيث تكون هذه العناصر متينة و صلبة ومستقرة ، وعند تطبيق طرق الحسابات المذكورة يتحتم السعي إلى أقصى حد للاقتصاد في المواد ، وعدم الإفراط في زيادة من أبعاد عناصر الإنشاءات ولتنفيذ ذلك تتضح ضرورة الدراسة الكاملة ، والعميقة لخواص المواد المستعملة ، و لطبيعة الأحمال المؤثرة على العنصر المحسوب ، ويمكن التوصل إلى ذلك عن طريق الأبحاث التجريبية ، ومن ناحية أخرى فعند استنتاج الحسابات الأساسية المتعلقة بمقاومة المواد يلزمنا إدخال مختلف الفرضيات التي تسهل العمل ، إن صحة هذه الفرضيات وكذلك مقدار الخطأ الذي تحدثه في الصيغ الحسابية يمكن التأكد منهما بمقارنة نتائج الحسابات بوساطة الصيغ مع المعطيات التجريبية في علم مقاومة المواد حيث نجد أن التجربة والنظرية مرتبطتان بالشكل وثيق ، فهذا العلم هو نظري وتجريبي في وقت واحد . فكل الفرضيات النظرية وكل النتائج تخضع للتجربة و بعد التأكد من صحتها تُقر للاستخدام ، وكذلك تساعد التجربة النظرية في تلك الحالات عندما تكون الحسابات النظرية شديدة التعقيد .

ونشير هنا إلى أن أهمية علم مقاومة المواد تزداد مع تطور التكنيك . إن قدماء البناة والمصممين عندما كانوا يفتقدون النظرية استندوا أساساً إلى التجربة الغضة ناسخين النماذج الموجودة فكانت تصاميمهم شديدة الضخامة واستغرقت في حالات معينة سنين متواصلة وأحياناً استمرت قروناً كاملة . ففي القرن الثامن عشر ومع تطور التجارة البحرية وتطور التعدين واستخراج الخامات برزت الحاجة الماسة لحل المسائل الخاصة بمتانة البواخر والمنشآت . وأصبحت الطرائق القديمة للحساب غير جائزة وإلى ذلك التاريخ تعود بداية تطور علم مقاومة المواد حيث إنه و لأول مرة في العالم في فرنسا ظهر منهاج مقاومة المواد في عام 1826.

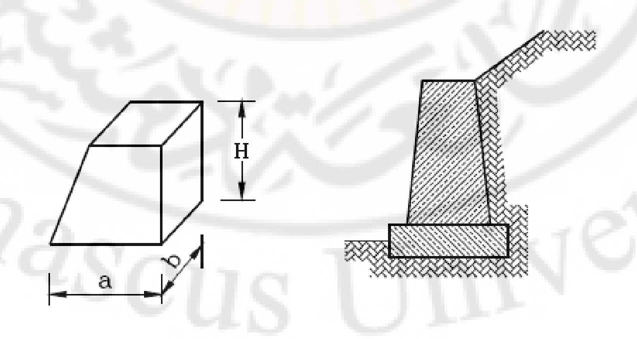
إن الأبحاث الأولى في مجال المتانة أجراها علماء الفيزياء والرياضيات مثل بيرنوللي و غاليوغاليلي في النصف الأول للقرن السابع عشر وفي عام 1678صاغ روبرت هوك بالاستناد إلى الملاحظة قانونه المهم الذي ينص على التناسب الطردي بين مقدار التشوه والحمولة في الجسم المرن . و اتسعت في القرن التاسع عشر والقرن العشرين الدراسة التجريبية والنظرية في علم مقاومة المواد ونخص بالذكر العلماء ياران الذي وضع قانون توزع الإجهادات في الجوائز المعرضة للانعطاف , وأيلر صاحب نظرية استقرار العناصر المعرضة للانعطاف الطولي . كما أسهم كثير من العلماء بأعمالهم التجريبية والنظرية في تطوير هذا العلم نذكر منهم جورافسكي , و ياسينسكي , ومور , و نافيه .

2-1 تصنيف عناصر الإنشاءات الهندسية

الإنشاءات الهندسية(أبنية ، خزانات ، جسور ......إلخ) غالباً ذات الشكل معقد ،ولكن وجهة نظر مقاومة المواد تهتم بالشكل خاص بالأجزاء المنفردة لهذه الإنشاءات والتي يمكن تصنيفها حسب أبعادها الهندسية إلى الأشكال التالية :

1-2-1العناصر الحجمية :

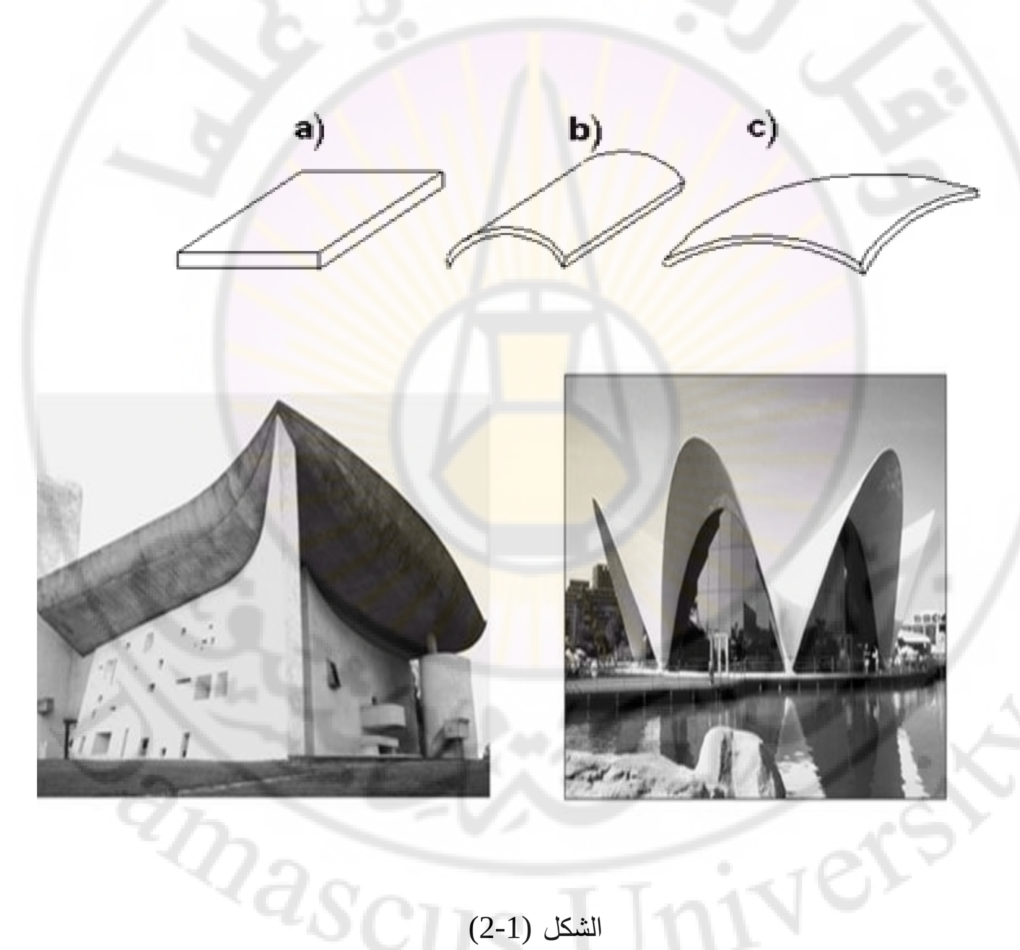
هي تلك الأجسام التي تكون أبعادها الثلاثة(طول ، عرض سماكة) من مرتبة واحدة وتسمى بالكتل . الشكل (1-1) كقواعد المنشآت الهندسية ، وركائز الجسور والسدود .



الشكل (1-1)

2-2-1 العناصر المستوية :

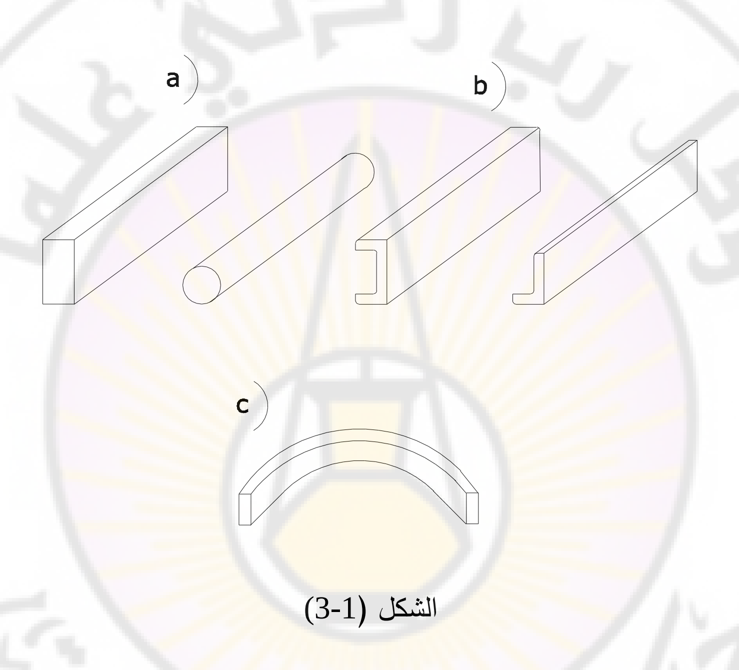
هي تلك الأجسام التي يكون فيها أحد الأبعاد (السماكة) أصغر من البعدين الآخرين (الطول ، العرض) – الشكل (a-2-1) وإذا كانت محددة بمستويين متوازين ومنحنيين سميت بالقشريات – الشكل (c-b-2-1) و تستخدم القشريات لتغطية الساحات الكبيرة مع الاستغناء عن الأعمدة (المطارات – المسابح – المباني الصناعية)



الشكل (2-1)

3-2-1 العناصر الخطية :

هي العناصر التي يكون فيها أحد الأبعاد (الطول) كبير بالنسبة إلى البعدين الآخرين الشكل (a-b-3-1) ومراكز ثقل مقاطعه العرضية تمثل المحور الطولي له , و المحور الطولي للعنصر يمكن أن يكون على أشكال مختلفة, وذلك وفق تغيرات مقطعه العرضـــــي الشكل (1-3 -c)



الشكل (1-3)

فـي مقاومـة المـواد وبالشـكل رئيسـي نـدرس العناصـر الإنشـائية الأكثـر انتشـاراً فـي المنشـآت والمباني:

- ❖ الجوائز : عناصر إنشائية تتحمل قوى شادة أو ضاغطة بالإضافة لتحملها لقوى عرضية وعزوم انعطاف أو فتل وتتصل مع الوسط المحيط بمساند وترتبط مع بعضها البعض ارتباطاً صلباً أو مفصلياً الشكل (1-4-a)
- ❖ القضبان : هي العناصر الطويلة والرفيعة ذات المقطع الصغير جدا" بالنسبة إلى الطول, وهذه العناصر تعمل بالشكل جيد على الشد

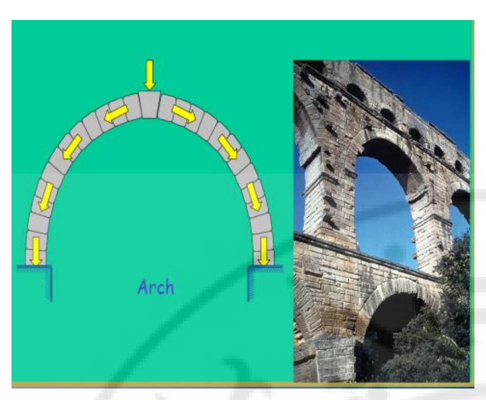
- الإطارات : جمل إنشائية مؤلفة من عناصر مستقيمة أفقية أو مائلة موثوقة في نقاط اتصالها, وتدعى العناصر الأفقية فيها بالجوائز وأما العناصر الشاقولية فتسمى بالأعمدة.

وتعمل العناصر التي تتكون منها الاطارات بالشكل أساسي على الانعطاف والتأثير المحوري (شد أو ضغط) ،بالاضافة إلى الأهمية البالغة للتشوهات الحاصلة تحت تأثير الحمولات الخارجية

- الجوائز الشبكية : مجموعة من القضبان المتصلة مع بعضها اتصالا" مفصليا" وتعمل على الشد أو الضغط ، وتبقى هذه العناصر محافظة على الشكلها المستقيم بعد التحميل والانفعال وغالبا" مانصادفها في منشآت الجسور والمنشآت الصناعية ذات الاطارات الفراغية ، وكذلك في هياكل الأبنية العالية السكنية والصالات الرياضية الشكل (b,4-1)



الشكل(a-4-1) جوائز وأعمدة





الشكل (b,4-1) جوائز شبكية وأقواس

الشكل(1-4) نماذج من العناصر الانشائية المستخدمة في المباني

- المنشآت المعلقة : تستخدم بالشكل واسع في المنشآت المدنية, وتتصف بأنها سهلة التصنيع وعاليةالاقتصاد مثال (الجسور المعلقة). وتعتمد هذه المنشآت على الأسلاك اللينة التي تعمل على الشد تحت تأثير الحمولات الخارجية .

3-1 الحمولات المطبقة على المنشآت

تسمى القوى التي تؤثر على المنشآت أحمالا" تكون الأحمال رأسية في معظم الأحيان أو أفقية أو مائلة ، ويفترض في علم مقاومة المواد معرفة القوى والحمولات المطبقة على المنشآت والتي يمكن تصنيفها:

1-3-1 وفقاً لنوع الحمولة

1- حمولات دائمة (تسمى بالحمولات الميتة)

الأحمال الميتة هي الأحمال التي لايتغير موضعها ،وتتكون أساسا" من الوزن الذاتي للمنشأ. ويمكن حساب هذه الأحمال بمعرفة أبعاد المنشأ والوزن الحجمي لمادة البناء. وفي الحياة العملية , لايُعرف على وجه التحديد وزن المنشأ قبل تصميمه, وبما أن هذا الوزن يدخل

ضمن أحمال التصميم التي يجب معرفتها قبل البدء بعملية التحليل والتصميم , فإن هذا الوزن يفترض عادة على ضوء الخبرة السابقة في منشآت مماثلة، ثم يدقق هذا الافتراض عقب اختيار مقطع معَين . الشكل(1−5−a)

2− حمولات مؤقتة (تسمى حمولات حية)

هي الأحمال الحية الأحمال التي يتغير موضعها سواء بفعل قوتها الذاتية مثل وزن الأفراد الذين قد يشغلوا مبنى معين أو السيارات والقطارات التي تعبر جسراً من الجسور. أو بفعل قدرة خارجية مثل البضائع المكدسة في المخازن.الشكل(1−5−b)



(b)



(a)

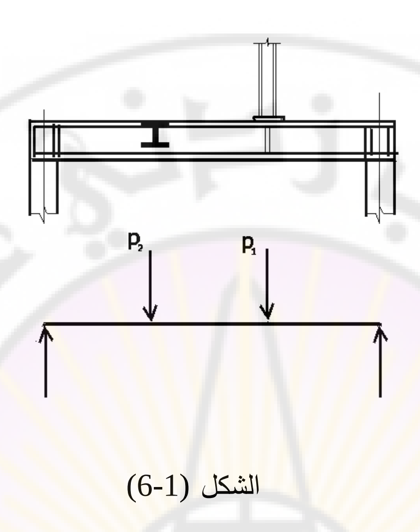
الشكل(1−5) أحمال مطبقة على المنشآت (حية وميتة)

2-3-1 وفقاً لمساحة تأثير الحمولة

1− حمولات مركزة

الحمل المركز هو الذي يفترض نظرياً تأثيره عند نقطة كالحمل المنقول من عجلات قطار أو ونش . وفي المباني ، قد يرتكز عمود على جائز أو يرتكز جائز على جائز آخر كما

في الشكل (6-1). في مثل هذه الأحوال ينتقل الحمل إلى الجائز الحامل على رقعة محدودة جداً منه ، الأمر الذي يسمح بعدّه حملاً مركزاً ويعبر عن الحمل بوحدات القوة .



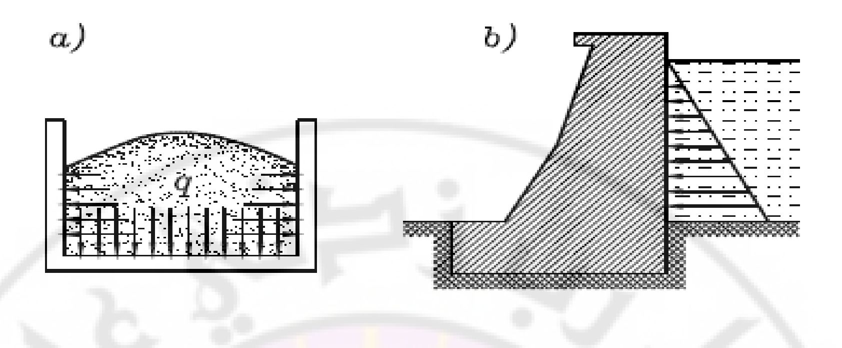
الشكل (6-1)

يبين الشكل (6-1) أيضاً التمثيل التخطيطي للأحمال المتناظرة . ويطلق على مثل هذه التخطيطات تخطيط شدة التحميل .

2- حمولات موزعة

الحمل الموزع هو، كما يوحي الاسم ، الذي يتوزع على مساحة أو طول معين من المنشأ . وقد يكون الحمل موزعاً بانتظام مثل الوزن الذاتي لجائز منتظم المقطع ويعبر عن الحمل في هذه الحالة بالقوة المؤثرة على وحدة الطول أي t/m أو kN/m وهكذا .

ويمكن أن تتوزع بأشكال مختلفة فمثلاً طبقة الرمل ذات السماكة الثابتة والموضوعة على سطح بلاطة تعد حمولة موزعة بانتظام على تلك البلاطة . أما إذا كانت طبقة الرمل مختلفة السماكة فتعد حمولة غير موزعة بانتظام ، وكذلك ضغط المياه هي حمولة موزعة بالشكل مثلثي على جسم سد ، بينما جدران خزان أرضي هو حمولة موزعة بانتظام على قعر ذلك الخزان الشكل (a-b-7-1)



الشكل (1-7)

2-3-1 وفقاً لحركة الحمولة

1- حمولات ستاتيكية

هي تلك الآحمال التي تؤثر على المنشآتبسرعة بطيئة جدا" ويستمر تأثيرها بالسرعة نفسها حتى تصل إلى قيمتها النهائية وبهذه الحالة يمكن إهمال اهتزاز المنشآت أو أقسامها تحت تأثير هذه الأحمال(يكون تسارع المنشأ معدوما" وتكون المنشآت واقعة في حالة التوازن)

2- الأحمال الديناميكية: هي تلك الأحمال التي تتغير قيمتها خلال فترة زمنية قصيرة كالأحمال التصادمية, ويرافق تأثير هذه الأحمال ظهور الاهتزاز في المنشأ (تسارع المنشأ غير مهمل) ومن هذه الأحمال تأثير الروافع وضغط القطارات على الجسور. بهذه الحالة يتم الحساب للعناصر المعرضة للأحمال الديناميكية بعد ضرب الحمولات الستاتيكية بثابت خاص أكبر من الواحد ويسمى هذا الثابت بالعامل الديناميكي.

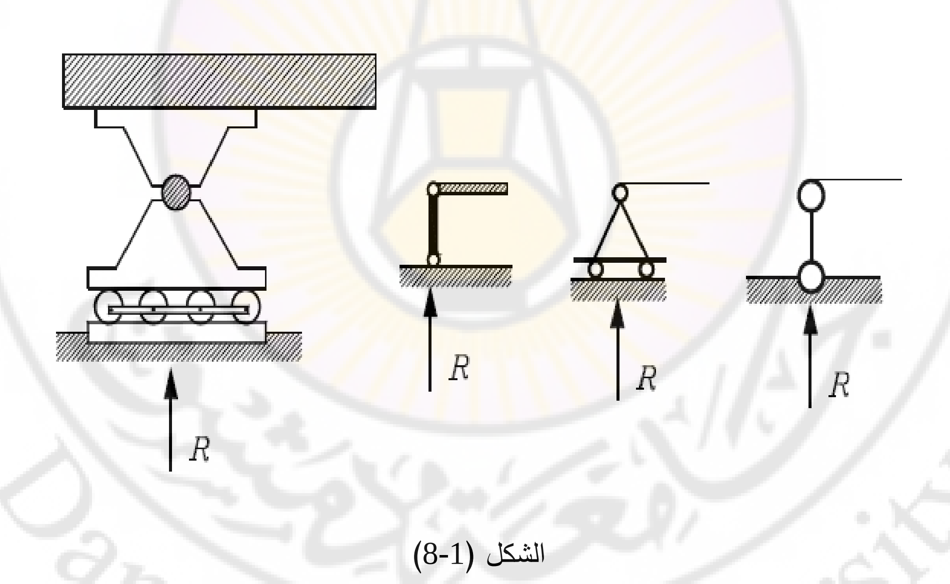
4-1 المساند وأنواعها

تقوم المساند بمنع المنشآت من الحركة وذلك عن طريق ربطها بأجسام ثابتة ، والقوى التي تستحدث عند المساند لمقاومة أي حركة محتملة نتيجة الأحمال الخارجية تسمى ردود الأفعال

ويمكن تقسيم مساند المنشآت التي تتعرض لأحمال تقع في المستوي نفسه إلى ثلاثة أنواع رئيسية:

1-4-1 المسند المفصلي البسيط أو المتحرك

يتألف هذا المسند من صفيحة علوية مثبتة بالجسم وصفيحة سفلية ترتكز على عدة مدحرجاتإسطوانية (دلافين) تستطيع الحركة في مستوي المسند , يوجد بين الصفيحتين مفصل يسمح للصفيحة العلوية وبالتالي للجسم بالدوران النسبي بالنسبة للصفيحة السفلية فهذا المسند لايعيق الحركة إلا بالاتجاه Y فلرد فعله مركبة وحيدة في هذا الاتجاه هي R الشكل (1-8)



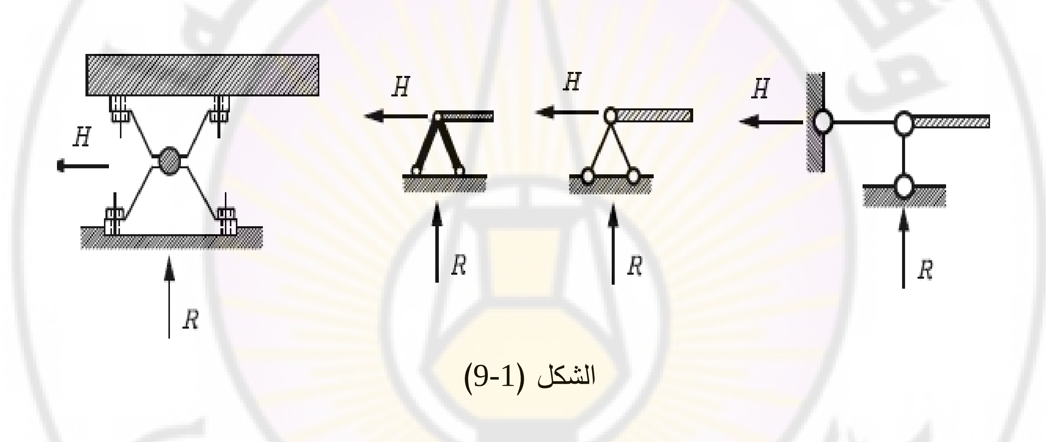
الشكل (1-8)

إن المساند المتحركة لها القدرة على امكانية تغيير مكانها وفق مستوى التدحرج بسهولة عند اختلاف درجات الحرارة وفي الوقت نفسه لها امكانية التخاص من احتمال ظهور الاجهادات الحرارية .

2-4-1 المسند الثابت

يختلف هذا المسند عن سابقه بأن الصفيحة السفلية مثبتة بالقاعدة الثابتة وبالتالي لايسمح بالحركة في أي من الاتجاهين وإنما يسمح بالدوران فقط ويحلل رد فعله إلى مركبتين هما $H\ ,R$ كما هو مبين بالشكل (1-9)

وبالتالي نجد أن لرد الفعل في المسند الثابت مجهولين من حيث القيمة ولكنهما معلومان من حيث الاتجاه ، ومن خصائصه منع التمدد والتقلص نتيجة تغيرات درجات الحرارة .



الشكل (1-9)

3-4-1 المسند الموثوق

المسند الموثوق لايسمح بدوران الجسم ولابحركته فهو يعيق الحركة في الاتجاهين X,Y ويمنع الدوران حول المحور Z ويحلل رد فعله إلى ثلاث مركبات هي $R, H\ ,M$ الشكل(1-10)

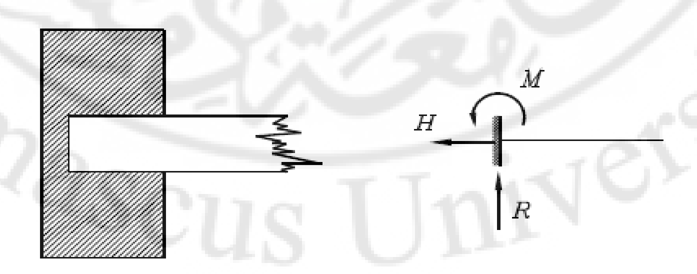
يتم تحديد ردود فعل مساند الجوائز على الشكل التالي : تحمل الجوائز بحمولات مركزة تقاس بوحدة القوى kN،n أو بحمولات موزعة بانتظام وتقاس بوحدة القوى إلى وحدة الطول kN /m أو بمزدوجة تقاس بوحدة العزوم kN.mأو بحمولات موزعة حسب الشكل معين , أو بمجموعة من هذه الحمولات . إن الجوائز البسيطة (لها فتحة واحدة) تستند إلى مسندين أحدهما متحرك والآخر ثابت , أو إلى مسند موثوق , وفي كلتا الحالتين تالشكل ردود الأفعال ثلاثة مجاهيل تعين من معادلات التوازن الثلاث :

$$\sum X_i = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y_i = 0 \qquad (2)$$
$$\sum M_i = 0 \qquad (3)$$

هذه المعادلات تعبر عن توازن القوى الخارجية والداخلية (ردود الفعل) المؤثرة على الجائز.
وتعني المعادلة (1) أن مسقط جميع القوى الخارجية والداخلية على المحور x يساوي الصفر .
وتعني المعادلة (2) أن مسقط جميع القوى الخارجية والداخلية على المحور y يساوي الصفر .
أما المعادلة (3) فتعني أن مجموع عزوم القوى الخارجية والداخلية جميعها بالنسبة إلى نقطة ما من الجائز يساوي الصفر .

وعندما تكون الحمولات المؤثرة على الجائز مائلة يمكننا تحليلها إلىمركبتين الأولى عمودية على محور الجائز , والأخرى منطبقة على محوره , ويتم الحل باستخدام معادلات التوازن الثلاث السابقة . وتؤدي المركبة الأولى إلى انعطاف الجائز , بينما تؤدي المركبة الثانية إلى ضغط أو شد جزء من الجائز , وبهذا نرى أن الجائز يخضع لانعطاف نتيجة القوى العمودية على محوره ولتأثير قوى ناظمية (ضغط أو شد) وفق محوره .

أما في حالة الجوائز التي يزيد فيها عدد ردود الأفعال عن معادلات التوازن فهي تسمى بالجوائز غير المقررة ستاتيكياً . ويمكن حل هذه الجوائز باستخدام معادلات التوازن واستعمال معادلات التشوهات للجوائز ، وسيتم شرح هذه الطريقة لاحقاً .



الشكل (1-10)

5-1 القوى الداخلية – طريقة المقاطع

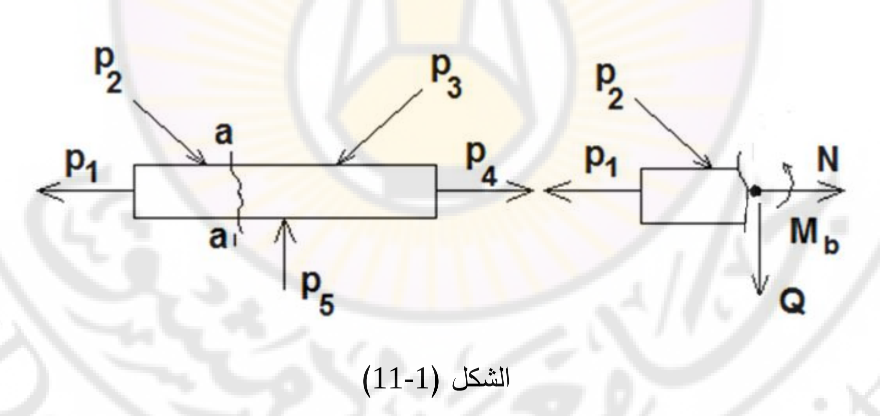
ـ ذُكر سابقاً أن القوى الخارجية المؤثرة على الجسم تستدعي ظهور القوى المقاومة لها داخل الجسم (قوى المرونة). لتحديد هذه القوى في مقطع ما في الجسم نلجأ إلى طريقة المقاطع.

لنفرض أننا أحدثنا مقطعا" لجسم في حالة توازن في النقطة التي تهمنا مثلا" في a-a الشكل (1-11). وبعد ذلك نهمل أحد القسمين (على الأغلب القسم الواقع تحت تأثير قوى أكثر) فنجد أن التأثير المتبادل بين القسمين يستبدل بقوى داخلية بحيث تساوي القوى الخارجية التي تؤثر على القسم المقطوع وإذا كانت القوى الخارجبة تقع في مستوى واحد فإنه من الضروري لتوازنها تطبيق ثلاث قوى داخلية على المقطع :

– قوة N باتجاه محور القضيب وتسمى القوة الناظمية.

– قوة Q التي تؤثر على مستوى المقطع العرضي وتسمى بالقوة القاصة (العرضية)

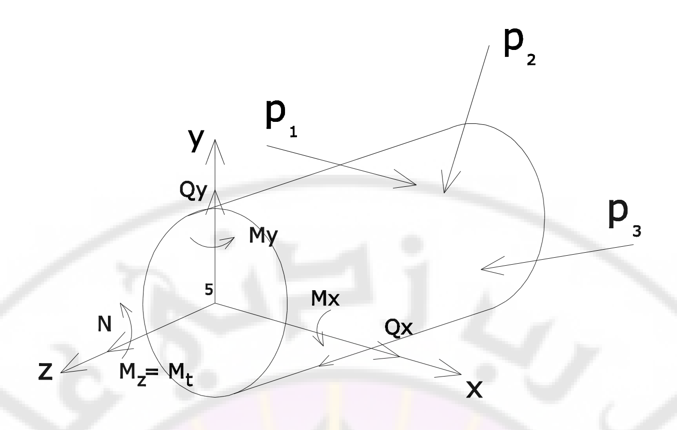
– عزم M_b ويكون مستوى تأثيره عموديا" على مستوى المقطع,ويسمى بعزم الانحناء لأنه يسبب انحناء القضيب.



الشكل (1-11)

بعد ذلك نضع معادلات التوازن لجزء الجسم المقطوع ومنها نحصل على Q,N,M.

أما اذا كانت القوى الخارجية وبضمنها ردود أفعال المساند لاتقع في مستوى واحد ففي هذه الحالة يمكن أن تظهر ثلاث قوى داخلية وثلاث عزوم كما في الشكل(1-12).



الشكل (1-12)

N− قوى ناظمية محورية

Q_x, Q_Y − قوى قص (عرضية)

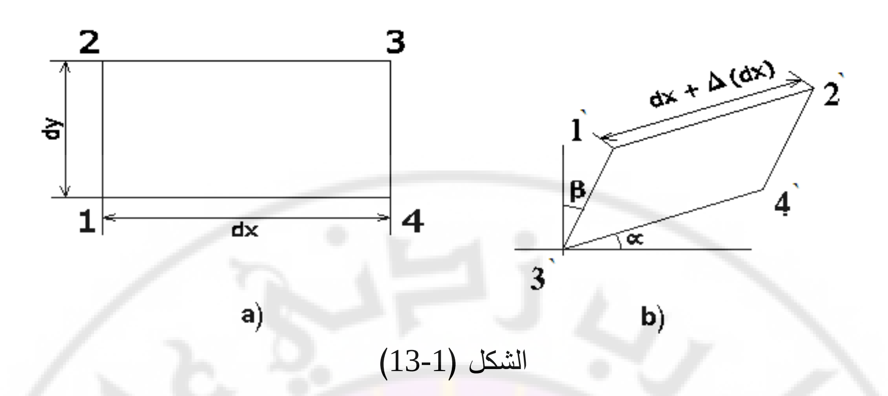
M_z − عزم فتل يؤثر في مستوي القطع وذلك لأنه ينشأ عند فتل العنصر

M_x, M_y عزوم الانعطاف

ولتحديد القوى والعزومالثلاثالمذكورمن الضروري استعمال ست معادلات للتوازن وهي مجموع مساقط القوى المطبقةعلى القسم المقطوع على كل من محاور الاحداثيات الثلاثة يساوي صفرا" وكذلك مجموع عزوم القوى المطبقة على القسم المقطوع على كل من محاور الاحداثيات التي تبدأفي مركز ثقل المقطع يساوي صفراً.

6-1 الانتقالات والانفعالات (التشوهات):

تتشوه الاجسام الواقعة تحت تأثير القوى الخارجية أي أن أبعادها وأشكالها تتغير،وتغير الأبعاد الطولية للجسم يسمى بالتشوه (الانفعال) الطولي ، وتغير مقادير الزوايا يسمى بالتشوه الزاوي . فإذا أخذنا مستطيلا" صغيرا" ,1,2,3,4, الشكل(1-13) على سطح الجسم بالقرب من النقطة المدروسة نجد أن هذا المستطيل في الحالة العامة قد أخذ الشكل متوازي أضلاع `1,`2,`3,`4 نتيجة للتشوه.



الشكل (1-13)

ويعطى تغير أبعاد الأضلاع 2,1 و4,3 طبيعة الانفعال(التشوه) الطولي الكامل في تلك النقطة بالاتجاه الرأسي . وتغير أبعاد الأضلاع 3,2 و4,1 يعطي طبيعة الانفعال (التشوه) الطولي الكامل في الاتجاه الافقي ، أما تغير الزاوية القائمة بين ضلعي المستطيل المذكور سابقا" والذي يساوي $\gamma = \alpha + \beta$ يبين طبيعة التشوه الزاوي في النقطة.

ويرمز للانفعال (التشوه) الطولي الكامل $\Delta\, dz, \Delta\, dy$ وما شابه ذلك نسبة إلى أي رمز يرمز له إلى طول القسم المدروس ، ولكي نتخلص من تأثير أبعاد أضلاع المستطيل نستعمل مفهوم الانفعال (التشوه) الطولي النسبي

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dz} \quad \varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

وبذلك يكون الانفعال الطولي النسبي ε بدون وحدات قياس ويكون موجبا" إذا رافق ذلك زيادة في الطول. ولقد بينت التجربة بأن هذا الانفعال الطولي أو الزاوي يزول عمليا" أو جزئيا" تبعا" لنوعية المادة ودرجة التحميل وذلك عند زوال الحمل المؤثر. ويسمى الانفعال الذي يزول بعد رفع الحمولة بالتشوه المرن ، والاجسام التي تتميز بهذه الصفات تدعى بالاجسام المرنة أما إذا احتفظ الجسم بالانفعال (التشوه)

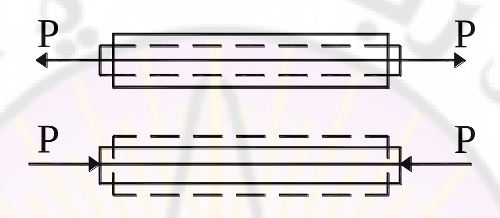
بعد إزالة الحمولة فيسمى بالتشوه اللدن ، والأجسام التي تتميز بهذه الصفات تدعى بالاجسام اللدنة ويمكننا بمعرفة تشوه الجسم في جميع نقاط مقاطعه وحالة تثبيته تحديد انتقال جميع نقاط الجسم أي تبيان أوضاعها(إحداثياتها الجديدة) بعد الانتقال.

7-1 حالات تأثير القوى الخارجية على العناصر:

تؤثر القوى الخارجية على عناصر المنشآت بأشكال مختلفة نقف على الحالات الأساسية منها:

1) الشد أوالضغط. 2) القص.

3) الإنعطاف. 4) الفتل.

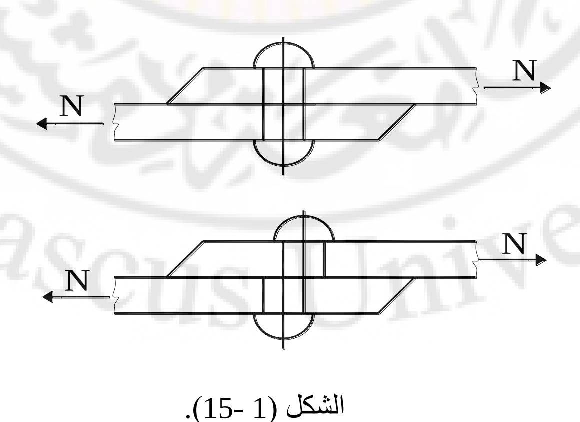


الشكل (1 -14) شد – ضغط لعنصر

- حالة القص :

عندما تكون القوى الخارجية موضوعة بالشكل يسمح لها (إذا بلغت حداً كبيراً) بقص أحد أجزاء العنصر عن الآخر.

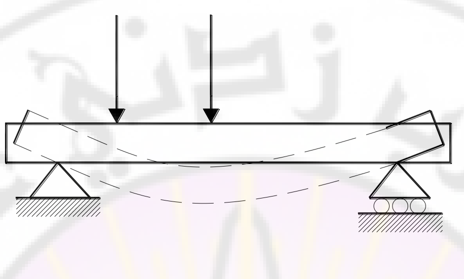
مثال ذلك برشيم يصل صفحتين معرضتين للشد ، ويسبب هذا النوع من تأثير القوى الخارجية انزلاق **Sliding** قسم من العنصر بالنسبة للقسم الآخر. الشكل **(1-15)**



الشكل (1 -15).

- حالة الانعطاف:

هي الحالة الأكثر حدوثاً في الحياة العملية وتكون عندما تؤثر القوى الخارجية على جائز مثبت بطريقة معينة، وتكون مطبقة على مستوى مار بمحور، الجائز مما يؤدي إلى انحناء الجائز. الشكل (1-16)، ويسبب الانعطاف تقلصاً في الألياف العلوية في الجائز وتمدداً في الألياف السفلية



الشكل (1-16)

- حالة الفتل:

وتحدث عندما يتعرض العنصر لتأثير مزدوجتين واقعتين في مستويين متعامدين مع محوره. الشكل (1−17).

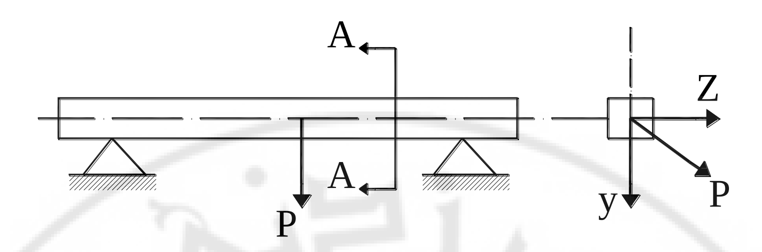


الشكل (1-17).

فعند فتل الأسطوانة مثلاً يتحول المستقيم المرسوم على سطحها والموازي لمحورها إلى خط حلزوني.

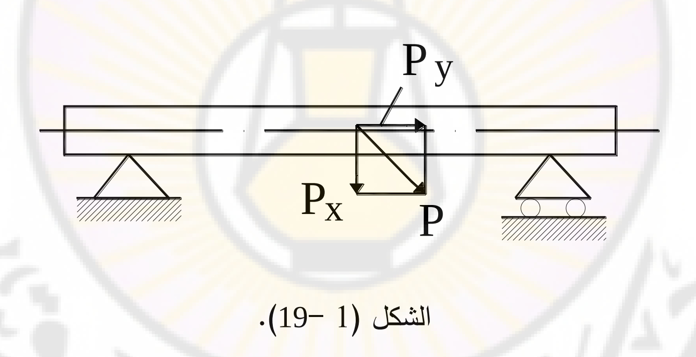
إن الحالات الأربع السابقة هي الحالات الأساسية، وكثيراً ما يتعرض العنصر إلى حالتين أو أكثر من تلك الحالات الأساسية في وقت واحد.

1− الانعطاف المركب وهوالانعطاف في مستويين من المستويات التي تقسم العنصر إلى قسمين متناظريين، مثال ذلك انعطاف عنصر ذومقطع مستطيل في المستوي الأفقي والمستوي الشاقولي. الشكل (1 −18).



الشكل (1 −18)

2− انعطاف مع شد أوضغط الشكل (1 −19).

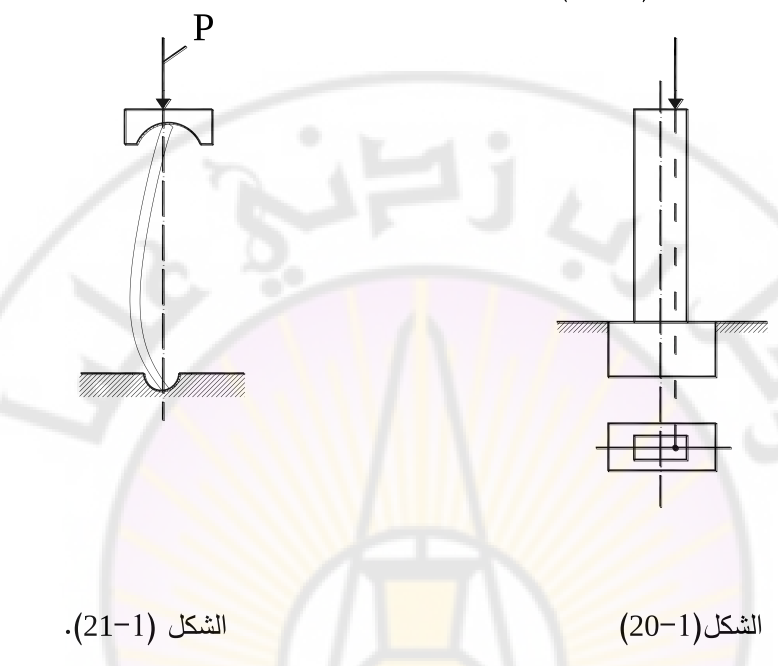


الشكل (1 −19).

3− الشد أوالضغط اللامركزي: وتحدث هذه الحالة عندما تكون القوى الطولية (شد أوضغط) موازية لمحور العنصر ولكنها ليست مطبقة في مركز ثقل المقطع بل منحرفة عنه بمسافة معينة. الشكل(1−20)

4− الفتل مع الانعطاف: مثال ذلك فتل محور ثقيل في سيارة إذ ينعطف هذا المحور بسبب وزنه الذاتي.

5- التحنيب: ويحدث عندما يعاني عمود رفيع طويل ضغطاً محورياً ما يؤدي إلى تحنيب العمود. الشكل (1 -21).



الشكل (1-21). الشكل(1-20)

وسنستعرض وندرس في الفصول القادمة الحالات الأساسية لتأثير القوى الخارجية على العناصر، ومن ثم الحالات الخاصة لتأثير هذه القوى.

8-1 الفرضيات المستخدمة في مقاومة المواد :

أثناء وضع طرق الحسابات من الصعب الأخذ بعين الاعتبار جميع الخواص المختلفة للأجسام الحقيقية لذلك لابد من استخدام بعض الفرضيات التي تتعلق بصفات المادة والقوى المؤثرة عليها والعلاقة الكائنة بينهما

- عد مادة الجسم متجانسة: أي أن خواص المادة في جميع نقاط الجسم واحدة, حيث يمكننا أن نؤكد في هذا المجال أن المعادن تتصف بخواص متجانسة جدا" لكن كثيرا" من مواد البناء الاخرى مثل الخشب والبيتون والحجر والبلاستيك تعد أقل تجانسا". فالبيتون مثلا" يحتوي على حصى ورمل ناعم يختلفا في خواصهما عن خواص

❖ الاسمنت , وتوجد في الخشب عقد تختلف خواصها كثيراً عن خاصية كتلة الخشب .

ومع وجود هذه العيوب الطارئة في المادة أظهرت التجارب أن الحسابات التي تعتمد افتراض تجانس الماد تعطي نتائج مقبولة إلى حد ما للمواد الانشائية المستخدمة في البناء .

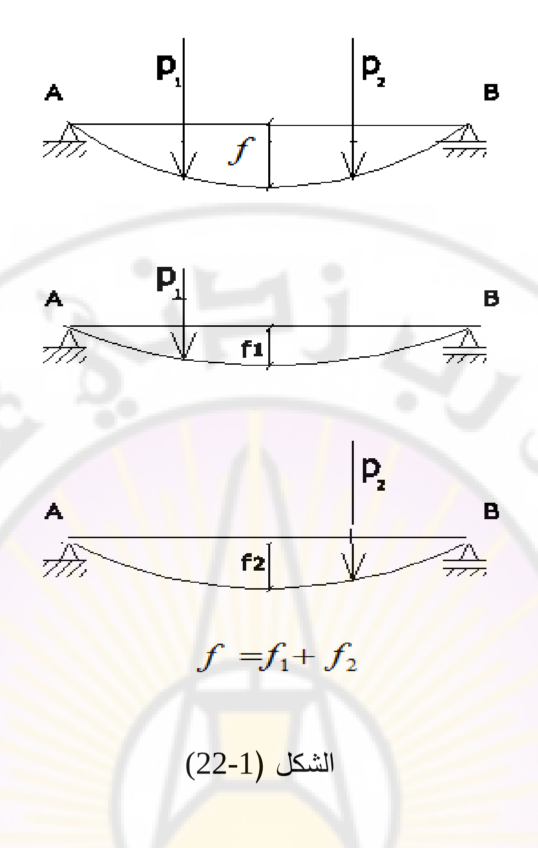
❖ خواص المادة موحدة وثابتة في كل نقطة وفي جميع الاتجاهات وهذه الفرضية غير صحيحة لمعظم المعادن ,إذ إن التجارب المخبرية أثبتت أن خواص البلورات المكونة لكثير من المواد تكون مختلفة جداً في مختلف الاتجاهات فمثلاً إن مقاومة بلورات النحاس في بعض الاتجاهات تختلف عن الاتجاهات الأخرى بأكثر من ثلاث مرات .

ولكن في الحياة العملية يمكن عد المواد ذات تركيب حبيبي دقيق كمواد متشابهة الخواص وذلك بفضل التوزع البلوري غيرالمنتظم وأما خواصها فهي تتوازن في الاتجاهات المختلفة وبالنسبة إلى المواد الأخرى كالخشب مثلا" حيث تختلف صفاته من حالة تطبيق القوى بالشكل متعامد مع الألياف عن حالة تطبيق القوى بالشكل مواز للألياف.

إن المواد التي تختلف خواصها من نقطة الى أخرى وفي أي اتجاه تسمى بالماد المتباينة الخواص , وعند حل بعض المسائل الخاصة بمادة كالبلاستيك يجب أن نأخذ بعين الاعتبار تباين خواصه ويتم ذلك عن طريق استخدام طرق نظرية المرونة .

❖ عد مادة الجسم ذات تركيب أصم متماسك, أي نفرض أن تركيب مواد البناء مكون من حبيبات متناهية في الصغر ومتماسكة دون انقطاع ودون وجود فراغات بين هذه الحبيبات , ولقد أثبتت التجارب العملية صحة هذه النظرية لأن هذه الفراغات الصغيرة لاتؤثر كثيرا" على سلوك المادهوخواصها الخاضعة لتأثيرات الأحمال الخارجية.

❖ فرضية مبدأ تراكب القوى (جمع الآثار) , فإذا أثرت مجموعة من القوى على جسم ما فإن تأثيرها على هذا الجسم يساوي مجموع نتائج تأثيرات كل قوة على انفراد. وهذا ما يوضحه لنا الشكل(1-22) حيث انتقال النقطة c من الجائزناتج عن التأثير المشترك للقوى P_1, P_2 والتي نستطيع تحديدها بالعلاقة التالية : $f = f_1 + f_2$



$$f = f_1 + f_2$$

الشكل (1-22)

يستخدم مبدأ جمع الآثار بالشكل واسع النطاق في الميكانيك النظري للاجسام المطلقة الصلابة ، وأما في مقاومة المواد فإننا نعد أن الجسم يتشوه نتيجة تطبيق القوى الخارجية . ويمكن استخدام مبدأ جمع الأثار في مقاومة المواد في الحالتين التاليتين :

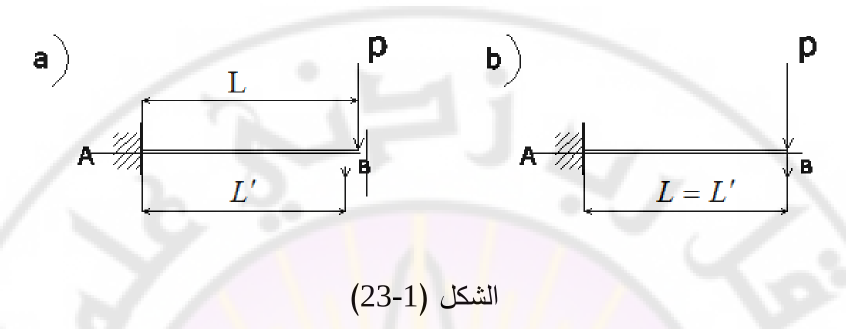
1- عندما تكون التشوهات الحاصلة في نقاط تطبيق القوى الخارجية صغيرة بالمقارنة مع أبعاد الجسم .

2- عندما تكون التشوهات الناتجة عن تشوه الجسم مرتبطة بعلاقة خطية مع القوى المؤثرة أي أن التشوهات مرنة

❖ فرضية الأطوال الأولية الثابتة تتميز العناصر المستخدمة في المنشآت الهندسية بصلابة كبيرة وبتشوهات صغيرة تحت تأثير الحمولات الناتجة عن استثمار هذه المنشآت , ومن الممكن إهمال هذه التشوهات عند كتابة معادلات التوازن وعد الجسم

❖ مطلق الصلابة , مثال ذلك الجائز AB المطبق عليه قوة P والتي تبعد عن المسند A بمسافة قدرها L الشكل (1-23) فتحت تأثير القوة المطبقة سيتعرض الجائز للتشوه

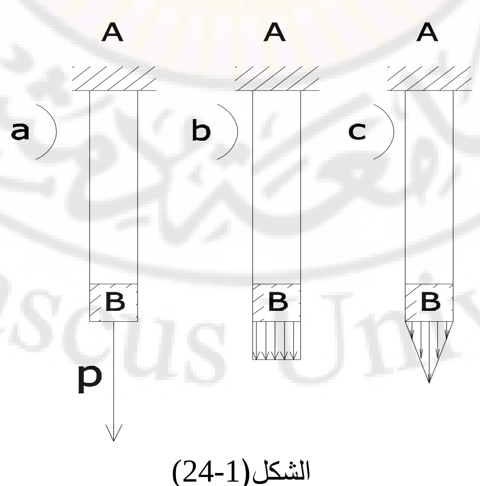
ويتغير إلى L' وحسب هذه الفرضية نستطيع أن نكتب أن $L = L'$. أي مضمون هذه الفرضية يبين لنا أن التشوهات في مواد البناء صغيرة جدا" ما يسمح لنا باستعمال المعادلات الستاتيكيةللاجسام الصلبة وأيضا" للاجسام الخاضعة للتشوه.



الشكل (1-23)

❖ مبدأ سانت فينانتا SAINT-VENANTA أو فرضية الاجهاد الموضعي وتنص هذه الفرضية على أنه إذا طبقنا في مكان معين من الجسم أحمال ستاتيكية مختلفة فالاجهادات تكون مختلفة فقط في القسم المطبق عليه الأحمال , أما باقي الأقسام فالأحمال لايكون لها تأثير على توزع الاجهاد,

إذا كان لدينا مثلا" القضيب AB والمحمل بقوة وحيدة p الشكل (1-24-a) أو قوى موزعة بانتظام متوازية ومستمرة الشكل(1-24-b) أو متغيرة الشد ومستمرة الشكل (1-24-c) . فنلاحظ أن توزع الاجهاد يكون غير منتظم فقط في المناطق القريبة من نهايات القضيب .



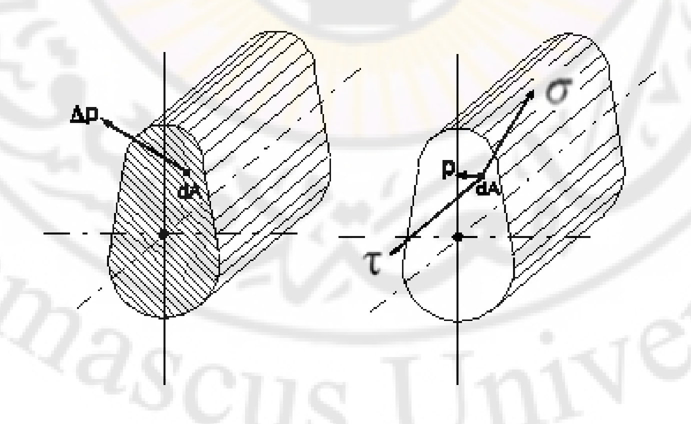
الشكل(1-24)

- ❖ فرضية المقاطع المستوية أو فرضية بيرنولي BERNOULLI والتي تنص على أن المقاطع العرضية للعنصر تبقى مستوية بعد تشوه العنصر وذلك تحت تأثير الحمولات الخارجية.
- ❖ عد مادة الجسم ذات تركيب أصم متماسك وبالتالي لم نأخذ التركيب الذري للمواد بالاعتبار , وذلك لأن معظم المواد المستخدمة في المنشآت مكونة من حبيبات دقيقة بحيث يمكن اعتبارها متماسكة دون انقطاع.

8-1 الإجهادات

لقد رأينا سابقاً أن القوى الداخلية موزعة على نقاط السطح المعين بمقطع عرضي في الجسم الخاضع لقوى خارجية وفي الحالة العامة تختلف قيم واتجاهات هذه القوى من نقطة إلى أخرى واقعة على المقطع . ومن أجل تحديد شدة القوى الداخلية في نقاط معينة لمقطع عرضي ما كان لابد من دراسة الإجهادات .

نأخذ عنصراً سطحياً متناهياً في الصغر مساحة مقطعه ΔA ولنفرض أنه يوجد قوة داخلية p تؤثر على هذا السطح الشكل (1-25)



الشكل (1-25)

إن نسبة القوة الداخلية ΔP إلى السطح ΔA تسمى بالإجهاد الوسطي P_{CP} أي :

$$P_{CP} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

وعندما تتناهى ΔA إلى الصفر نسمي كثافة القوى الداخلية المؤثرة ΔP بالاجهاد , وهكذا نرى أن الاجهاد نهاية العلاقة $\frac{\Delta P}{\Delta A}$ عندما تنتهي مساحة المقطع المدروس إلى الصفر .

$$P = Lim\left(\frac{\Delta p}{\Delta A}\right)_{\Delta A \to 0} \qquad (b)$$

من العلاقة (b) نلاحظ أن وحدة قياس الاجهاد هي kg/cm^2 بالجملة المكثية أو $M\ Pa$.
وللسهولة يمكننا أن نعرف الاجهاد بأنه كثافة القوى الداخلية المؤثرة على وحدة المساحة من مقطع معين , وتختلف قيمته من نقطة إلى أخرى , كما تختلف في النقطة ذاتها , وذلك باختلاف ميول المستويات المارة من هذه النقطة والتي تدرس الاجهادات بالنسبة إليها .
وفي الحالة العامة عندما يؤثر هذا الآجهاد على المساحة ΔA بزاوية α معلومة يمكن أن يحلل إلى مركبتين , الأولى عمودية على سطح المقطع وتسمى المركبة الناظمية (العمودية) بالإجهاد الناظمي ويرمز له بـ σ , وأما المركبة الثانية فهي تقع في مستوى المقطع أي مماسية وتسمى بالاجهاد المماسي ويرمز له بـ τ الشكل (1-17) , ويكون لدينا من الشكل :

$$\sigma = P.\cos\alpha$$

و

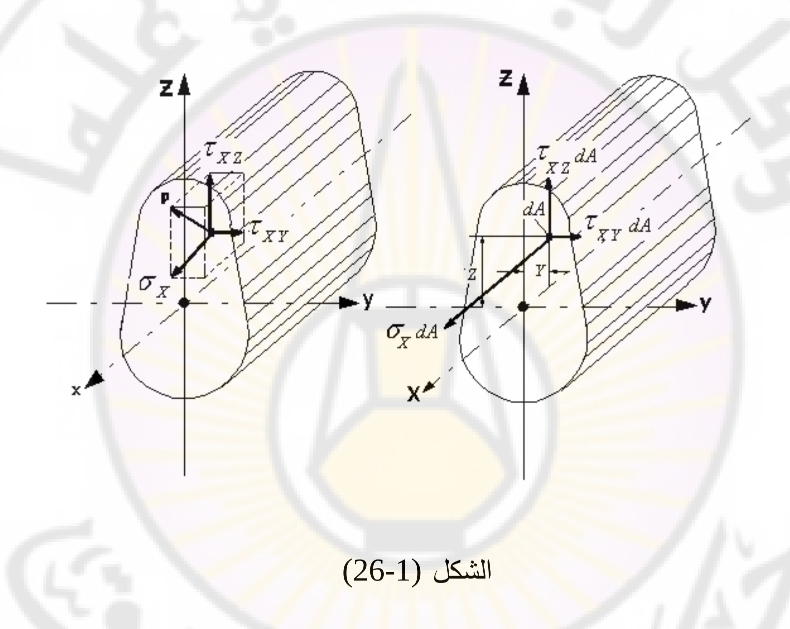
$$\tau = p.\sin\alpha$$

حيث :

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \qquad (1-1)$$

إن الاجهاد الكلي P لا يعد مقياساً مناسباً للقوى الداخلية في الجسم لأن المواد تختلف مقاومتها بين الاجهادات الناظمية والاجهادات المماسية (القاصة) . فالاجهاداتالناظمية تحاول تقريب أو إبعاد ذرات الجسم باتجاه عمودي على مستوى المقطع , وأما الإجهادات المماسية فهي تحاول إزاحة جزيئات الجسم بالنسبة إلى بعضها بعضاً في مستوى المقطع , لذلك تسمى الاجهادات المماسية بإجهادات الإنزياح أو اجهادات القص .

ويمكن تحليل مركبة الاجهاد الكلي P إلى ثلاثة مركبات بدلاً من مركبتين وهي موازية للمحاور الاحداثية x و y و z الشكل (1-26) , وذلك بالنسبة إلى نقطة مأخوذة على المقطع العرضي. وبهذا التحليل نحصل على المركبتين τ_{XZ} و τ_{XY} للاجهاداتالمماسية ويشير الحرف الأول في تسمية الاجهادات المماسية إلى المحور الذي يوازي الناظم على المقطع المدروس ، ويشير الحرف الثاني إلى المحور الذي يوازي الاجهاد ذاته , أما المركبة الثالثة فهي مركبة الاجهادات الناظمية التي تعرف بالمحور الذي توازيه هذه الاجهادات .

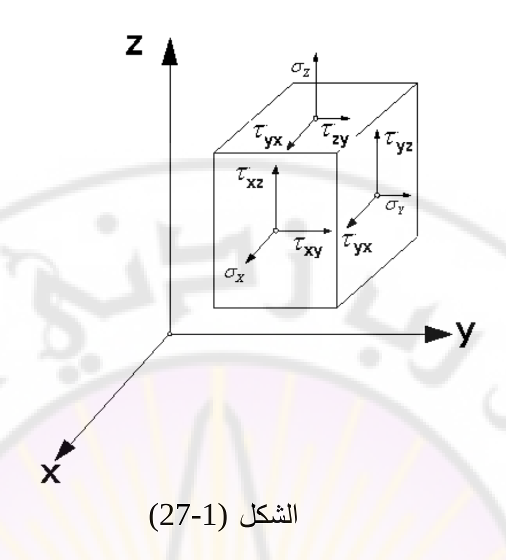


الشكل (1-26)

العلاقة بين الاجهاد الكلي ومركباته الثلاث تعطى بالعلاقة التالية :

$$P = \sqrt{\sigma_X^2 + \tau_{XZ}^2 + \tau_{XY}^2} \qquad (2-1)$$

وفي الحالة العامة إذا قطعنا مكعباً صغيراً جداً حول نقطة معينة من جسم معرض لجملة فراغية من القوى , فالاجهادات التي تؤثر على أوجه هذا المكعب يمكن توضيحها على الشكل (1-27)



الشكل (1-27)

ففي الحالات التي تكون فيها الاجهادات $\sigma_Z , \sigma_Y , \sigma_X$ تساوي الصفر تسمى حالة الاجهاد بثلاثية المحاور أو الحجمية .

وإذا كان أحد هذه الاجهادات يساوي الصفر فتسمى حالة الاجهاد هذه بثنائية المحور أو الاجهادات في الحالة المستوية .

وإذا كانت مركبتان من هذه الاجهادات صفراً فتسمى حالة الاجهاد هذه بوحيدة المحور أو الطولية كما في حالة الشد أو الضغط المركزي .

وفي حال كانت الاجهادات العمودية وحدها تؤثر على أوجه المكعب فإنها تسمى بالاجهادات الرئيسية , وأما المساحات التي تؤثر عليها الاجهادات الرئيسية فإنها تسمى بالساحات الرئيسية ويمكن الاشارة هنا إلى أنه يمكننا إيجاد علاقة تربط بين الاجهادات والقوى الداخلية الناتجة في المقطع العرضي للعنصر الانشائي وذلك عن طريق أخذ جداء قيم الاجهادات σ_Z و σ_{ZX} و σ_{ZY} في مساحة المقطع العرضي dA التي تؤثر عليه هذه الاجهادات فإننا نحصل على القوى الداخلية :

$$dN_Z = \sigma_Z dA \quad , \quad dQ_X = \tau_{ZX} dA \quad , \quad dQ_Y = \tau_{ZY} dA$$

وبأخذ المجموع الجبري لهذه القوى الجزئية على كامل سطح المقطع العرضي نحصل على القوى الداخلية المؤثرة :

$$N_Z = \int_A \sigma_Z \, dA \qquad (3-1)$$

$$Q_X = \int_A \tau_{ZX} \, dA \qquad (4-1)$$

$$Q_Y = \int_A \tau_{ZY} \, dA \qquad (5-1)$$

وللحصول على عزوم القوى الداخلية نأخذ جداء كل قوة جزئية بمسافة بعدها عن المحور الإحداثي الموافق لها :

$$dM_X = (\sigma_Z dA).Y$$

$$dM_Y = (\sigma_Z dA).X$$

$$dM_Z = (\tau_{ZX} dA).Y - (\tau_{ZY} dA).X$$

وبالتكامل لهذه العزوم الجزئية على كامل سطح المقطع العرضي تحصل على عزوم القوى الداخلية التالية :

$$M_Z = \int_A (\tau_{ZX}.Y - \tau_{ZY}.X) \, dA \qquad (6-1)$$

$$M_X = \int_A \sigma_Z.Y \, dA \qquad (7-1)$$

$$M_Y = \int_A \sigma_Z.X.dA \qquad (8-1)$$

الفصل الثاني

الشد والضغط لعنصر مستقيم

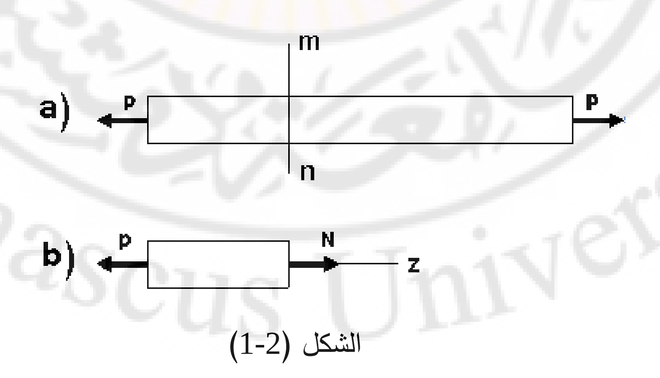
1-2 -القوى الداخلية لعنصر مستقيم ومخططاتها

لنبحث حالة الشد أو الضغط المحوري (المركزي) ، عندما تؤثر القوى الخارجية باتجاه محور القضيبالشكل (2-1) ولتحديد القوى الداخلية والتي هي قوى طولية فقط نستخدم طريقة القطع والتي تتلخص كما يلي :

نقطع القضيب بمستوى عمود على محوره إلى قسمين , القوة المتبادلة ما بين القسمين نعوضها بقوة طولية N (قوة ناظمية)والتي تعتبر موجبة إذا كانت شادة (أي متجهة من المقطع) وسالبة إذا كانت ضاغطة (أي متجهة نحو المقطع)

وفي الحالة عندما يكون اتجاه N غير معلوم , فمن الافضل اعتباره موجبا" وعندما نحل معادلة التوازن ونحصل على القوة باشارة موجبة فإن القضيب بحالة شد وإذا كانت باشارة سالبة فالقضيب مضغوط . وهكذا لتعيين القوة الطولية في المقطع (m-n)للقضيب المبين على الشكل (2-1) , ننظر إلى توازن القسم اليساري الشكل(b-1-2) ونكتب معادلة التوازن :

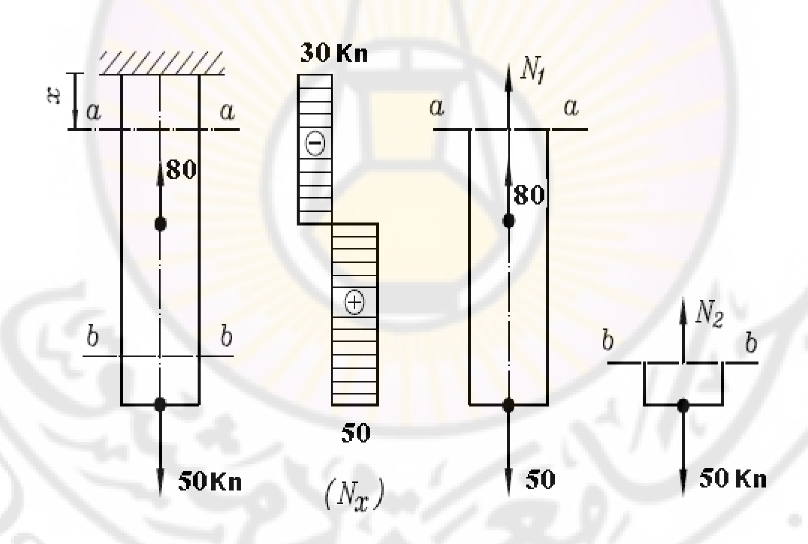
$$\sum Z = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P$$



الشكل (2-1)

إن مخطط القوى الطولية N يعطي صورة واضحة لتغير القوى الطولية على طول القضيب حيث يكون المحور السيني موازيا" لمحور القضيب والمحور الرأسي عموديا" عليه ونضع على المحور الرأسي وبمقياس محدد قيم القوى الطولية (مع أخذ الإشارة بعين الاعتبار) في المقاطع العرضية للقضيب , ولرسم مخطط القوى الطولية N يجب أن نعين قانون تغير القوى الطولية على طول القضيب ونعين قيمة N في عدة مقاطع عرضية ونضع إشارة (+) في حالة الشد و إشارة (−) في حالة الضغط .

ولحساب القوى الداخلية نقوم بإجراء مقطع ما مثلاً في (a-a) ونبحث في توازن الجسم الأسفل المقطوع ، ويستبدل تأثير القسم الأعلى الذي أهمل ، على القسم الأسفل بقوة طولية نعطيها اتجاهاً فرضياً مبتعداًعن المقطع ، حيث نفترض أن القوة شادة الشكل (2-2).



الشكل (2-2).

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_1 + 80 - 50 = 0 \Rightarrow N_1 = -30\ kN$$

أي أن القوة الطولية لا تكون في هذه الحالة شادة كما افترضنا بل ضاغطة .

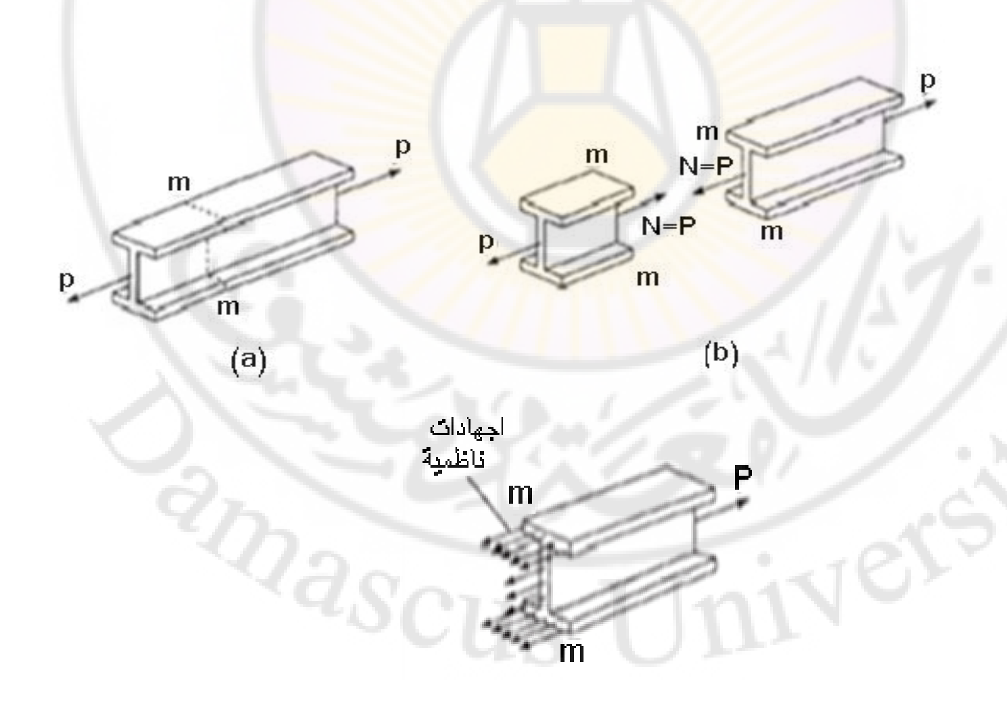
وبكتابة معادلة التوازن للقطع b-b نجد :

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_2 - 50 = 0 \Rightarrow N_2 = 50\, kN$$

2-2 تحديد الإجهادات الناظمية عند الشد

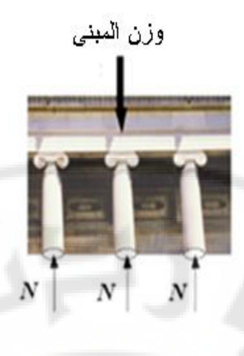
نطلق اسم الشد المركزي (المحوري) أو الضغط المركزي على القضبان المستقيمة التي تكون فيها القوى الخارجية مطبقة وفق محور القضيب ، في هذهالحالة تظهر في المقاطع العرضية قوة ناظمية مساوية إلى القوة ($N = p$) p.أما القوى الداخلية الأخرى (القوى العرضية ، عزم الفتل ، عزم الانعطاف) فتكون مساوية للصفر .

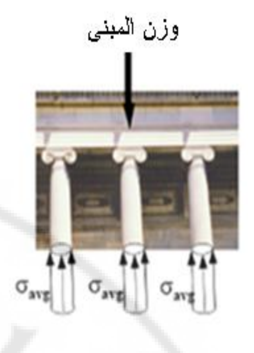
فمن أجل تعيين القوى الناظمية(الداخلية) نستخدم طريقة القطع حيث يقطع العنصر بمستوي عمودي على محوره إلى جزئين ويعوض التأثير المتبادل بقوة ناظميةN الشكل (2-2) وتعتبر القوة N موجبة إذا كانت تسبب الشد (متجهة من المقطع) وسالبة إذا كانت تسبب الضغط (متجهة إلى المقطع)



الشكل (2-2)







الشكل (2-3) مثال يوضح توزع الإجهادات الناظمية

من الشكل (2-2) نلاحظ أنه لدينا معادلة توازن واحدة $\Sigma x = 0$ أما المعادلتان المتبقيتان فتتحول كل منهما إلى مطابقة 0=0

لنأخذ سطحاً جزئياً dA على المقطع العرضي ، تؤثر على هذا السطح الجزئي قوة تساوي $dp = \sigma dA$ لكننا نحتاج إلى قيمة القوة المؤثرة على كامل المقطع العرضي لذلك نلجأ إلى عمليةالتكامل ثم باسقاط جميع القوى على المحور Xنجد :

$$\int_A \sigma \, dA - P = 0$$

ولكن التجارب المخبرية أثبتت أن المقاطع العرضية المستوية والعمودية على محور القضيب قبل التشوه تبقى مستوية وعمودية على محوره بعد التشوه وتدعى هذه الفرضية بفرضية المقاطع المستوية أو فرضية بيرنولي .

وبالتالي فإنه في المقاطع العرضية للقضيب تؤثر الإجهادات العمودية والموزعة في المقطع بصورة منتظمة وثابتة وبهذا يمكن إخراج σ خارج اشارة التكامل وتأخذ الصيغة السابقة الشكل التالي :

$$\sigma \int_A dA = P$$

$$\sigma . A = P$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (1-2)$$

وهي الصيغة النهائية لتوزع الإجهادات الناظمية في أي نقطة من المقطع العرضي .

إن وحدة قياس الإجهادات وحسب الجملة العالمية هي باسكال Pa أو ميغا باسكال MPa حيث

$$1\,MPa = 10\,kg/cm^2 \quad , \quad 1\,MPa = 10^6\ Pa \quad , \quad 1\ Pa = 1N/mm^2$$

مثال (2-1)

يطلب رسم مخططات القوى الناظمية والاجهادات في العنصر المبين بالشكل (2-3) وذلك بإهمال الوزن الذاتي علماً بأن :

$$E_1 = E_3 = 1{,}8.10^6\ kg/cm^2 \quad , \quad E_2 = 2{,}1.10^6$$

$$A_1 = 200\ cm^2 \quad A_2 = 50\ cm^2 \quad A_3 = 500\ cm^2$$

الحل:

– تعيين رد الفعل

$$\sum X = 0 \Rightarrow$$

$$-5.4 + 20 + 2 \times 3 + R_a = 0 \Rightarrow$$

$$R_a = -6\,t$$

– تعيين القوى الناظمية والإجهادات الناظمية

$$N_B = 0 \Rightarrow \sigma_B = 0$$

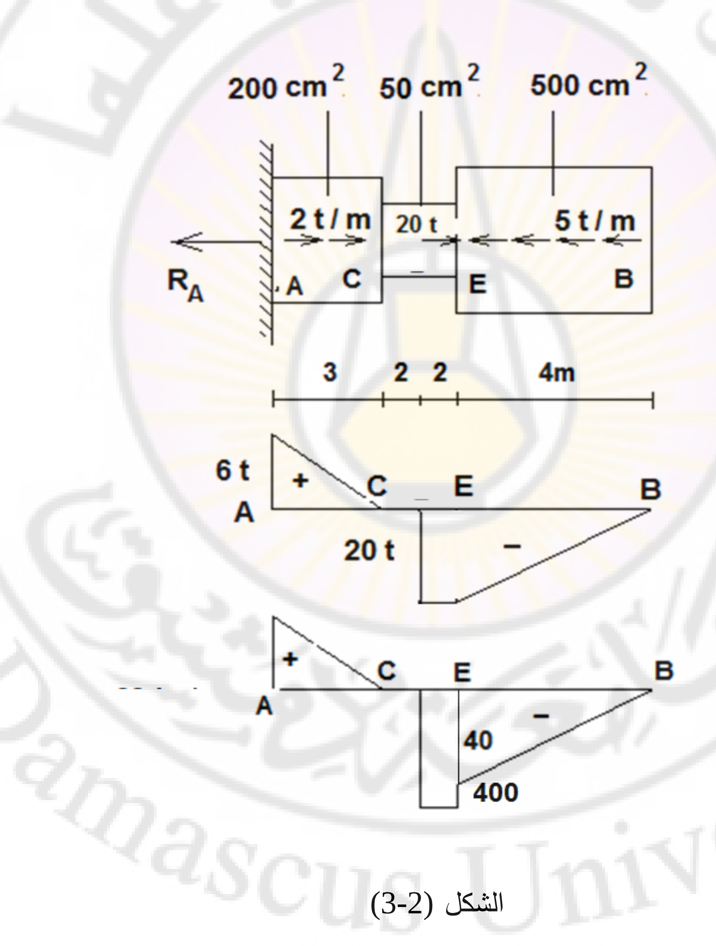
$$N_E^R = -20\,t \Rightarrow \sigma_E = \frac{-20.10^3}{500} = -40\,kg/cm^2$$

$$N_E^L = 0 \Rightarrow \sigma_E^L = 0$$

$$N_C^R = -20 + 20 = 0 \Rightarrow \sigma_{CD}^R = 0$$

$$N_C^L = 0 \Rightarrow \sigma_C^L = 0$$

$$N_A = 6\,t \Rightarrow \sigma_A = \frac{6.10^3}{200} = 30\,kg/cm^2$$



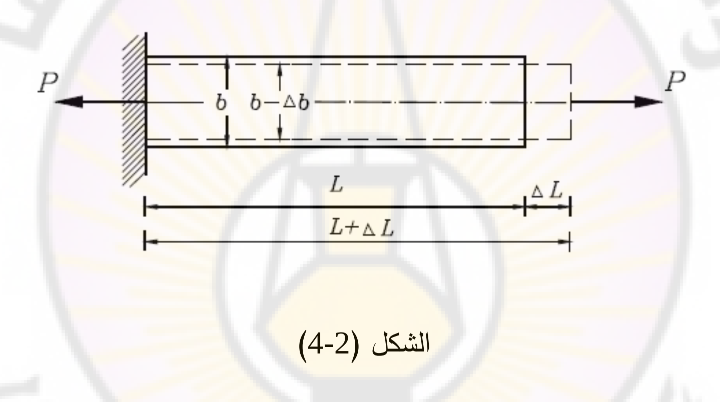
الشكل (3-2)

3-2 التمدد الكامل والتمدد النسبي : قانون هوك عند الشد

في علم مقاومة المواد ، سنقتصر على دراسة التشوهات المرنة التي تحدث في الجسم عندما لا تتجاوز الحمولات الخارجية حداً معيناً ، وتختفي هذه التشوهات بعد إزالة الحمولة ، أي المادة تعمل ضمن مجال المرونة

حيث أظهرت التجارب أن أبعاد العنصر تتغير تبعاً لتغيير قيمة واتجاه القوى المطبقة عليه ، ففي حالة الشد يزداد طول القضيب وتقل أبعاده العرضية وفي حالة الضغط يحدث العكس.

ليكن لدينا العنصر المبين في الشكل (2-4) والمعرض لقوة شد وفق محوره



الشكل (2-4)

بالإشارة إلى الشكل (2-4) إذا كان الطول الأصلي للقضيب L والتغير في طوله تحت تأثير القوة المحورية ΔL ، يمكن التعبير عن التشوه الطولي الذي يرمز له عادة بالحرف الإغريقي (ε) كما يلي :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad (2-2)$$

وبما أن التشوه الطولي يمثل النسبة بين التغير في الطول والطول الأصلي فهو كمية عديمة الأبعاد .

ولقد أكدت التجارب الكثيرة على أنه في حال ازدياد القوى الخارجية (قوة الشد أو الضغط) تزداد التشوهات ازدياداً يتناسب طرداً مع القوة المطبقة .

وبتعبير آخر كلما كانت القوى كبيرة كان التمدد كبيراً . نأخذ بدلاً من القوة ككل الجزء الذي يؤثر فيها على واحدة السطح (الإجهاد الناظمي) وبدلاً من التشوهات الكلية ΔL نأخذ التشوهات النسبية ε عندئذ يمكن صياغة العلاقة المذكورة بين الأحمال والتشوهات بالشكل التالي :
(الإجهادات الناظمية تتناسب طرداً مع التمدد النسبي) . ولقد اكتشف هذه العلاقة العالم الانكليزي روبرت هوك في النصف الثاني من القرن السابع عشر وتحمل اسم قانون هوك ويكتب اسم هذا القانون كما يلي :

$$\sigma = \varepsilon . E \qquad (3-2)$$

ويسمى ثابت التناسب في هذه المعادلة والذي يرمز له دائماً بالحرف E معاير المرونة معاير يونغ young modules ويحدد قابلية المادة للتشوه تحت تأثير القوى الخارجية وكلما كانت هذه القابلية كبيرة كانت قيمة عامل المرونة E صغيرة .

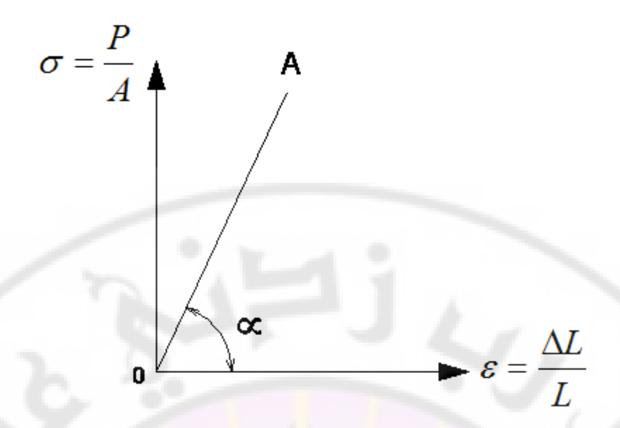
والخط البياني للعلاقة $\sigma = f(\varepsilon)$ هو خط مائل يمر من مركز الاحداثيات O كما هو مبين في الشكل (2-5) . وهكذا فالقيمة العددية لعامل المرونة تساوي ظل الزاوية التي يالشكلها الخط المائل OA بالنسبة لمحور ε أي $tg\alpha = E$.

ومن العلاقة (2-3) يمكننا حساب التمدد الكلي " الاستطالة المطلقة " عند الشد أو الضغط بعد أن نستبدل كل من ε ، σ بقيمها أي :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad , \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{\Delta L}{L} . E$$

$$\Delta L = \frac{P.L}{E.A} \qquad (4-2)$$



$\sigma = \frac{P}{A}$, $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

الشكل (2-5)

أي أن التمدد الكلي يتناسب طرداً مع القوة الشادة ومع طول العنصر وعكساً مع عامل المرونة ومساحة المقطع العرضي .

وفي الجدول (2-1) نورد القيم المتوسطة لـ E وعامل بواسون μ (الذي سيأتي شرحه في بند آخر) وذلك لعدد من المواد المستخدمة في البناء .

في القضبان ذات المقطع المتغير تدريجياً ومحملة بعدة قوى فإن الاستطالة ΔL تحسب من أجل كل قسم من أقسام القضيب الذي تكون فيه القيم P و A ثابتة ثم تجمع للحصول على الاستطالة الكلية للقضيب .

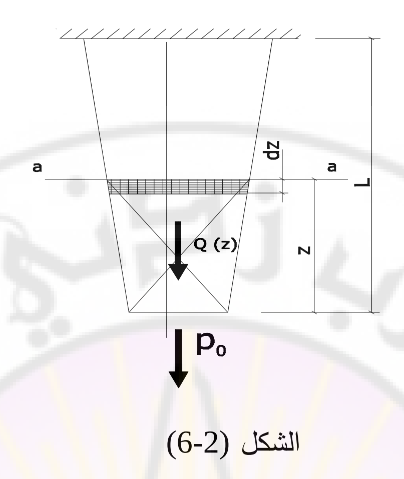
$$\Delta L = \sum \frac{P_i . L_i}{E . A_i}$$

أما إذا كانت هذه القيم P و A متغيرة فإن قيمة ΔL تعين على الشكل التالي :

ليكن لدينا قضيب محمل بقوة P_0 وخاضع لتأثير الوزن الذاتي الشكل (2-6) نأخذ عنصراً صغيراً dz الذي يقع على مسافة z من النهاية الحرة للقضيب .

نقطع القضيب بالمقطع $a - a$ ، ونرمز لمساحة المقطع العرضي بـ A_z . إن قيمة القوة الطولية

$$N_z = P_0 + Q_z$$



الشكل (6-2)

حيث Q_z وزن جزء القضيب الواقع تحت المقطع $\alpha-\alpha$ ، أما قيمة الإجهادات الناظمية في المقطع $\alpha-\alpha$ الموزعة فرضياً بانتظام على كامل المقطع العرضي فتساوي إلى :

$$\sigma_{\alpha}=\sigma_{(z)}=\frac{N_{(z)}}{A_{(z)}}$$

وقيمة التشوه المرن :

$$\varepsilon_{\alpha}=\varepsilon_{(z)}=\frac{\sigma_{(z)}}{E}$$

إن كامل تطاول القضيب يحسب من مجموع تطاولات أجزاء العناصر ذات الطول dz ، وبالتالي تطاول كل جزء يكون مساو إلى $\varepsilon_{(z)}.dz$ وبالنسبة للأجزاء ككل .

$$\Delta L=\int\varepsilon_{(z)}.dz=\frac{1}{E}.\int\frac{N_{(z)}}{A_{(z)}}.dz \qquad (5-2)$$

الجدول (2-1)

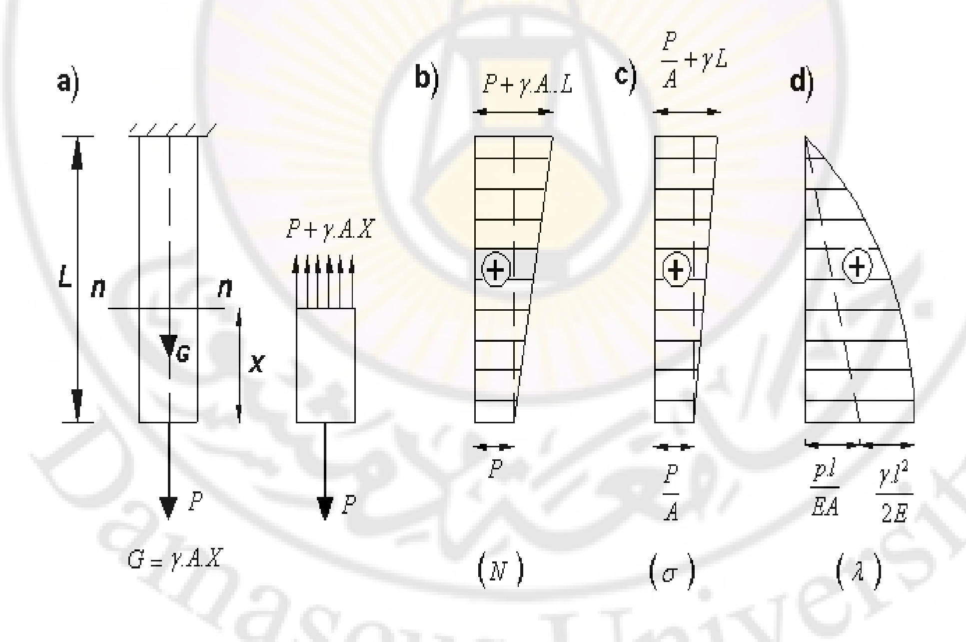
قيم عامل المرونة وعامل بواسون لعدد من المواد المستخدمة في البناء

المواد	عامل بواسون μ	عامل المرونة E	
		الوحدة العالمية MN/m^2	الوحدة المكثية kgf/cm^2
فولاذ	0.25-0.33	$(1.87\text{-}2.16).10^5$	$(1.9\text{-}2.2).10^6$
نحاس	–	$(1.08\text{-}1.28).10^5$	$(1.1\text{-}1.3).10^6$
برونز	0.32-0.35	$(0.716\text{-}1.22).10^5$	$(0.75\text{-}1.24).10^6$
خلائط ألمنيوم	0.33	$(0.687\text{-}0.706).10^5$	$(0.7\text{-}0.72).10^6$
نيكل	0.33	$2.06.10^5$	$2.1.10^6$
رصاص	0.42	$(0.147\text{-}0.196).10^5$	$(0.15\text{-}0.2).10^6$
جدران القرميد	–	$(2.45\text{-}2.94).10^5$	$(0.015\text{-}0.03).10^6$
بيتون ماركة **100-200** kgf/cm^2	–	$(0.147\text{-}0.226).10^5$	$(0.15\text{-}0.23).10^6$
بيتون مسلح (ضغط)	–	$(0.177\text{-}0.422).10^5$	$(0.18\text{-}0.43).10^6$
بيتون مسلح (انعطاف)	–	$(0.108\text{-}0.265).10^5$	$(0.11\text{-}0.27).10^6$
خشب بالشكل موازي للألياف	–	$(8.83\text{-}15.7).10^3$	$(9\text{-}16).10^4$
خشب بالشكل عمودي	–	$(0.39\text{-}0.98).10^3$	$(0.4\text{-}1.0).10^4$

4-2 الاستطالة الكلية لقضيب تحت تأثير الوزن الذاتي

إن للوزن الذاتي تأثير يؤخذ بعين الاعتبار وذلك كقوة إضافية إلى القوى الخارجية المؤثرة , وينتج عن هذه الاضافة في الحمولة زيادة في الاجهادات الناظمية والتي تزداد كلما ابتعدنا عن نهاية العنصر .

ففي المنشآت العالية وبتأثير الوزن الذاتي نضطر لتغيير مقطع الأعمدة, بينما يهمل هذا الوزن في تحديد الاجهادات في الأعمدة القصيرة وسنرى الآن تأثير الوزن الذاتي على عناصر بمقاطع مختلفة وكيفية رسم مخططات القوى الناظمية– الاجهادات – التشوهات النسبية .لنفرض أنه لدينا عمود مقطعه العرضي ثابت موثوق في طرفه العلوي ويخضع لقوة شد مطبقة في طرفه السفلي الشكل (2-7)



الشكل (2-7)

بالشكل عام إن القوة الناظمية (الداخلية) في مقطع ما لعنصر معرض لقوى ناظمية مركزة أو موزعة تحدد بالعلاقة التالية :

$$N_x = \sum p + \sum \int q_x.dx \qquad (6-2)$$

حيث :

p– القوة الناظمية المركزة .

q_x – الحمولة المحورية الموزعة .

والإجهادات الناظمية في أي مقطع عرضي بالعلاقة :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A_x}$$

والتشوهات النسبية من العلاقة العامة :

$$\varepsilon_x = \frac{N_x}{A_x.E}$$

والتشوهات الكلية لعنصر متعدد الأجزاء ومعرض لأحمال مختلفة من الصيغة العامة التالية :

$$\Delta L = \sum_{k=0}^{k} \int_{k=i}^{k=i+1} \frac{N_x dx}{E_i.A_i} \qquad (7-2)$$

ففي المقطع n – n والموجود على بعد x من الطرف الحر للعنصر الشكل (3-8) وباستخدام طريقة القطع ودراسة توازن الجزء الباقي نجد أن N_x تساوي إلى :

$$N_x = P + \gamma.A.X \qquad (8-2)$$

حيث :

γ – وزن واحدة الحجوم للعنصر .

A– مساحة المقطع .

ونلاحظ أن القوى الناظمية وبسبب الوزن الذاتي للعنصر تتزايد كلما ابتعدنا عن أسفل العنصر متجهين إلى الوثاقة ، فلرسم الخط البياني N_x (مخطط القوى الناظمية) .

نأخذ محوراً على الشكل مستقيم مواز لمحور العنصر ونضع قيمة القوة بالشكل متعامد على هذا المحور وذلك حسب التابع N_x المتعلق بالمتحول x , ونضع اشارة(+) ضمن دائرة في حالة الشد , واشارة (−) في حالة الضغط (b-7-2) نلاحظ أن قيمة القوة على طول العنصر ليست واحدة , وتكون ذات قيمة عظمى عند الوثاقة حيث $x = l$.

$$\sigma_{\max} = \frac{P+G}{A} = \frac{P}{A} + \gamma L \leq [\sigma] \qquad (9-2)$$

حيث :

$G = \gamma.A.L$ الوزن الذاتي الكلي للعنصر .

$[\sigma_t]$ − الاجهاد المسموح به عند الشد .

ولحساب تشوهات العنصر ندرس تشوه جزء متناه في الصغر من العنصر ثم نعين التشوه الكلي لهذا الجزء حسب العلاقة

$$\Delta dx = \frac{N_x .\, dx}{E.A}$$

ولتعيين التشوهات الكلية للعنصر بأكمله نأخذ مجموع التشوهات الجزئية أو نأخذ تكامل التشوهات من x إلى L .

$$\int_x^l \Delta dx = \int_x^l \frac{N_x .\, dx}{EA} = \frac{1}{EA} \int_x^l (p + \gamma.a.x)\, dx$$

وبعد إجراء عملية التكامل للعلاقة السابقة نجد :

$$\Delta l = \frac{p}{EA}(l - x) + \frac{\gamma(l^2 - x^2)}{2E}$$

نلاحظ أن التشوه المطلق Δl للعنصر عبارة عن علاقة غير خطية لأن المتحول x من الدرجة الثانية , ولتمثيل هذا التشوه تخطيطيا" ندرسه حسب تغيرات المتحول x.

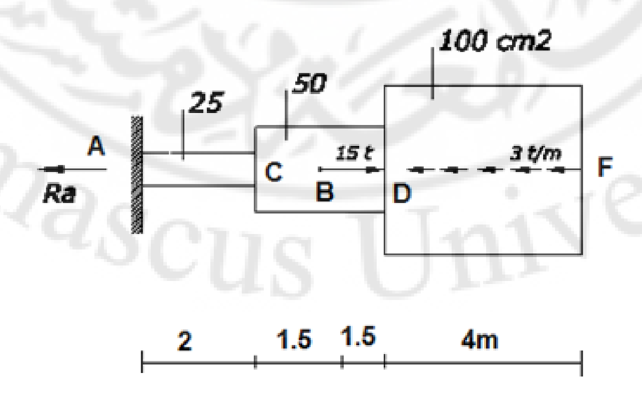
من أجل الطرف الحر للعنصر عندما x = 0 نجد أن قيمة الانتقال لهذا المقطع تكون عظمى ومساوية للتشوه الكلي للعنصر :

$$\Delta l = \frac{p.l}{EA} + \frac{\gamma.l^2}{2E} \qquad (10-2)$$

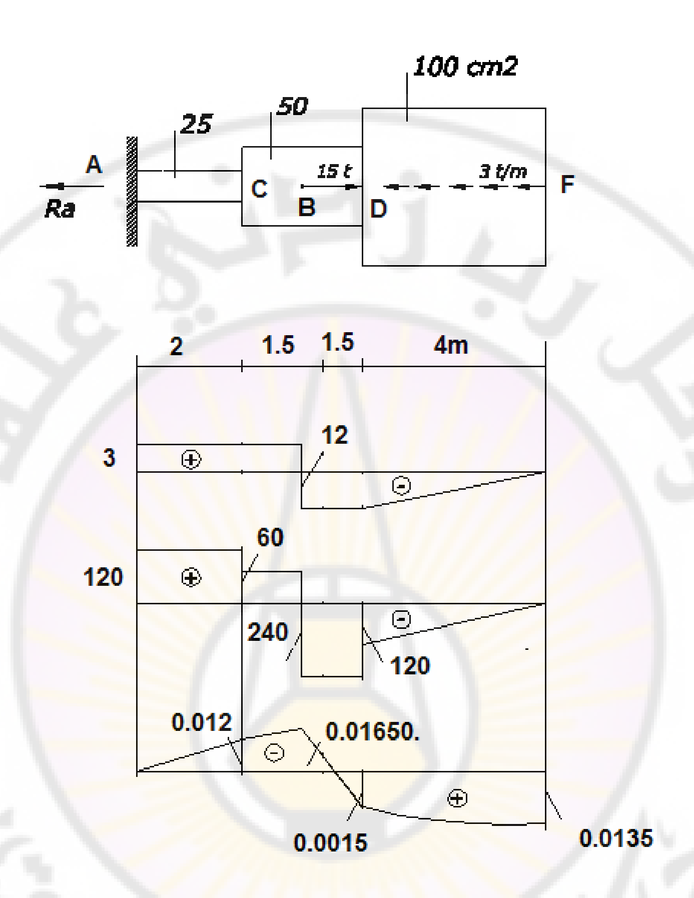
نلاحظ أن الحد الاخير من الصيغة (3-10) يعبر عن التشوهات الناتجة عن تأثير الوزن الذاتي أما قيمة التشوه الكلي عند الوثاقة حيث x = L فهي تساوي الصفر والشكل (3-7-d) يوضح كيفية رسم مخطط الانتقال λ

مثال (2-2)

يطلب رسم مخططات القوى الناظمية والإجهادات والانتقالات في العنـــصر المبين بالشكل (2-8) وذلك باهمال الوزن الذاتي لهذا العنصر . علماً بأن : $E = 2.10^6\ kg/cm^2$



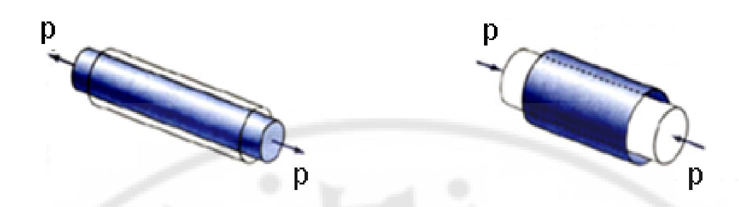
الحل :



الشكل(2-8)

2-5 عامل التشوه العرضي

أثبتت التجـارب المخبريـة أن حـدوث التشـوه فـي الاتجـاه الطـولي للعناصـر المعرضـة للشـد أو الضغط يرافقها تشوهات في الاتجاه العرضي كما هو مبين بالشكل (2-9)



الشكل (2-9)

أي إن الشد يزيد من طول القضيب بمقدار Δl , وينقص من عرضه بمقدار $\Delta b = b - b_1$

وبالتالي يمكن أن نكتب أن : التشوهات النسبية الطولية تساوي : $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

والتشوهات النسبية العرضية تساوي : $\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$

وتكون التشوهات العرضية في حالة الضغط تشوهات تمدد , وفي حالة الشد تشوهات تقلص.
بين التشوه الطولي النسبي ε والتشوه النسبي العرضي توجد علاقة تجريبية :

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \qquad (11-2)$$

حيث :
μ _ معامل التشوه العرضي (عامل بواسون)

إشارة (–) في العلاقة السابقة تشير إلى أن تطاول القضيب يرافقه صغر في المقطع العرضي وتقاصر القضيب يرافقه ازدياد في المقطع العرضي .
إن عامل بواسون دوما" ذو قيمة موجبة $(0 \le \mu \le 0.5)$ لأن $\varepsilon , \varepsilon'$ لهما إشارات مختلفة

إن عامل التشوهات μ مثله مثل عامل المرونة E , يعد من الخواص الأساسية لمواد البناء . وتتراوح قيمته من 0 إلى 0.5 ولقد أدرجنا في الجدول (2-2)قيم عامل التشوهات لعدد من مواد البناء .

6-2 التشوه النسبي الحجمي

بالاعتماد على عامل بواسون(μ) يمكننا دراسة تغير حجم عنصر معرض للشد أو الضغط وتغير مساحة المقطع العرضي لهذا العنصر .

لنعين قيم طول العنصر بعد تمدده :

طول العنصر بعد تمدده : $L_1 = L\,(1+\varepsilon)$

عرض المقطع بعد الشد : $b_1 = b\,(1-\varepsilon\mu)$

مساحة المقطع بعد الشد : $A_1 = b^2(1-\varepsilon\mu)^2 = A(1-\varepsilon\mu)^2$

حجم العنصر : $V_1 = A_1.L_1 = A(1-\varepsilon\mu)^2 L.(1+\varepsilon)$

$$= V\,(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2$$

وحجم المقطع بعد الشد : $= V\,(1+\varepsilon)(1-2\mu\varepsilon+\mu^2+\varepsilon^2)$

$$V_1 = V\left[1+\varepsilon(1-2\mu)-2\mu\varepsilon^2+\mu^2\varepsilon^3+\mu^2\varepsilon^2\right]$$

وبما أن ε مقدار صغير بالنسبة لـ L , فإننا نستطيع أن نعد ε^2 , ε^3 مقدارا" متناهيا" في الصغر يمكن إهماله وعندها :

$$V_1 = V\left[1+\varepsilon(1-2\mu)\right] \qquad (12-2)$$

ويكون التغير النسبي للحجم :

$$\frac{dV}{V} = \frac{V_1-V}{V} = \varepsilon(1-2\mu) \qquad (13-2)$$

وبما أن الشد يرافقه توسع في حجم العنصر والضغط يرافقه نقص في حجم العنصر , فإن إشارة التشوه النسبي في الحجم تطابق إشارة التشوه الطولي النسبي .

ومن هنا ينتج أن إشارة القوس $(1-2\mu)$ يجب أن تكون دوما" موجبة , ومن هنا يتضح لنا أن μ لايمكن أن تتجاوز 0.5

وبالطريقة السابق نفسها يمكننا أن التشوه النسبي لمساحة المقطع العرضي للعنصر تساوي :

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\mu\varepsilon \qquad (14-2)$$

7-2 الدراسة التجريبية لخواص المواد في حالة الشد

2-7-1 الهدف من التجارب المخبرية وأنواعها

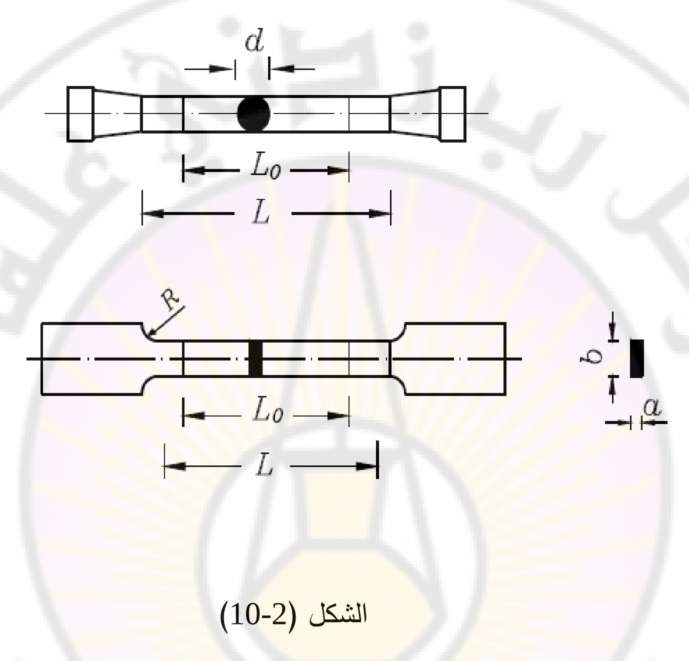
لدراسة خواص المواد وتحديد مقدار الإجهادات المسموح بها ، يتم إجراء اختبارات على نماذج المادة حتى تحطمها (انهيارها) أو حتى ظهور التشوهات اللدنة فيها . وتجري الاختبارات بحالات التحميل التالية : الستاتيكية ، التصادمية أو الطارئة ، الدورية
وتختلف الاختبارات على الشد والإنضغاط والالتواء أو الانحناء تبعا" لنوع التشوه الحاصل للنموذج المختبر . وفي حالات نادرة تجرى اختبارات للنموذج تحت تأثير مقاومة مركبة , مثلاً في حال اقتران الشد مع الفتل وتجرى التجارب عادة في ظروف قياسية , وذلك لأن نتائج الاختبارات تتعلق بالشكل النموذج وسرعة التحميل والحرارة ......الخ
وتجرى الاختبارات بوساطة آلات خاصة مختلفة من حيث تركيبها وقدرتها .
ولقياس التشوه تستخدم أجهزة قياس مخبرية (تنزومتر) لها حساسية عالية ويمكن الاطلاع على دراسات تفصيلية للآلات وأدوات الاختبار في مراجع خاصة .
ويستعمل لأجل الاختبار الستاتيكي نموذجان متطابقان كحد أدنى ، أما للاختبارات الديناميكية فتستعمل ثلاثة نماذج أو عينات ، أما اختبار التحميل فيتطلب من ست إلى ثماني عينات متطابقة كحد أدنى . وللحصول على نتائج أكثر دقة عند اختبار المواد الأقل تجانساً ، يجب الإكثار من التجارب المتكررة بقدر الإمكان .

2-7-2 التجارب الستاتيكية على الشد – مخطط الشد

إن اختبار الشد أو الضغط تحت تأثير الحمل الستاتيكي هو الأكثر انتشاراً وذلك لسهولته ، وفي الوقت نفس يعطي في حالات كثيرة ، امكانية الحكم الصحيح على سلوك المادة في الحالات

الأخرى للتشوه . لهذه الغاية تستخدم نماذج خاصة وقد وضحت الأبعاد النظامية لمثل هذا النموذج في الشكل (2-10)

ويبلغ قطر النماذج الاسطوانية العادية الاساسية 10mm والطول الأولي الحسابي $L_0 = 10\,d$ (للنماذج الطويلة) و $L_0 = 5\,d$ (للنماذج القصيرة)

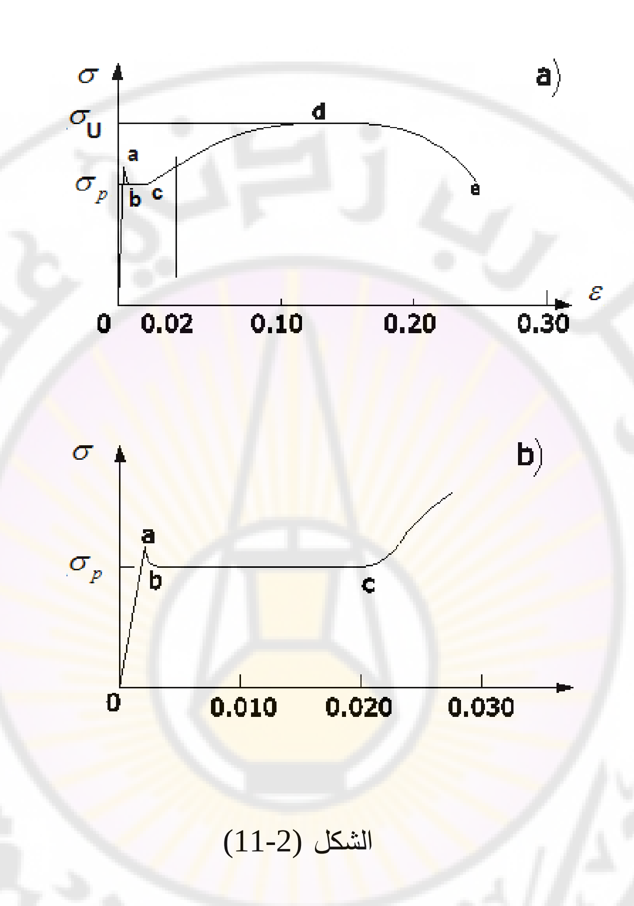


الشكل (2-10)

تجري التجارب المخبرية على العينات في مكابس هيدروليكية خاصة تتراوح قوتها بين $(100-200\ ton)$ مزودة بمؤشر يعين قيمة القوة المطبقة على العينة . وأغلب هذه المكابس تكون مزودة براسم ميكانيكي يمكننا من رسم مخطط بياني ما بين القوة الشادة والتشوهات الطولية Δl . تطبق الحمولة على العينة بالشكل بطيء على درجات متساوية , ونقيس بعد كل درجة من التحميل التغيرات الحاصلة في الجسم

وتقاس التشوهات الطولية بوساطة مؤشرات كهربائية " تنزومتر " تلصق على العينات وهي متصلة بجهاز يعطينا قيم هذه التغيرات بدقة فائقة حيث نقيس تحول التشوهات بدقة $\frac{1}{1000000}$ كما يمكن قياس التشوهات الطولية بأجهزة قياس ميكانيكية تدعى بالمؤشرات الميكانيكية حيث تقيس تغيرات كلية mm $(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000})$.

ويبين الشكل (2-11) نموذجا" لمخطط الشد لقضيب من الصلب الطري معرض لشد مركزي محوري وكما هو واضح نميز عدة حدود (مجالات) :



الشكل (2-11)

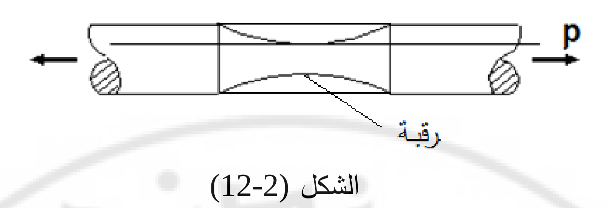
حد التناسب (σ_p) : والموافق للقسم ab وفي هذا المجال نلاحظ أكبر قيمة للإجهاد والتي من خلالها تتناسب التشوهات خطيا" مع الإجهاداتلأن العلاقة $\sigma = f(\varepsilon)$ خطية وبالتالي صحة قانون هوك الشكل (2-10-a)

حد المرونة (σ_c) : نلاحظ أكبر قيمة للاجهاد والتي من خلالها لا نلاحظ بعد ظهور تشوهات دائمة وإذا لم يتجاوز الإجهاد هذا الحد يستعيد القضيب طوله الأصلي عند زوال القوة المؤثرة , ويقال عندئذ أن القضيب مرن , وتعرف المرونة بأنها خاصة المادة التي تسمح لعنصر باستعادة الشكله الأصلي عند زوال القوة المؤثرة عليه .

حد اللدونـة – (الخضـوع) (σ_y) : يبين الشكل (b-11-2) جزءاً من الإجهاد والتشوه المناظر لتشوه صغير نسبيا" مرسوما" بمقياس أكبر بغرض الإيضاح , إذا تجاوز التشوه المناظر لنقطة a, يحدث هبوط مفاجئ في الإجهاد كما يظهر في الجزء ab من المنحنى . وبين نقطتي b , c يقال إنّ المادة تخضع , ويسمى هذا المجال بمجال الخضوع أو مجال اللدونة , وتسمى النقطة a بنقطة الخضوع العليا والنقطة b نقطة الخضوع السفلى والإجهاد المناظر يسمى بإجهاد الخضوع , وفي العادة يهمل إجهاد الخضوع العلوي ويشير تعبير إجهاد الخضوع إلى الإجهاد المناظر للخضوع المستمر , أي إجهاد الخضوع السفلي والذي يُرمز له بالرمز σ_y ومن ناحية أخرى , تعد النقطة a نهاية حد المرونة وبداية حد اللدونة أو الخضوع ويرمز للتشوه المناظر بالرمز ε_y ويستمر حد الخضوع حتى النقطة c ونلاحظ أن القضيب لايعود إلى طوله الأصلي عند إزالة الإجهاد. أي أن التشوه لدن . وتعطى عدة مواد عند اختبارها على الشد رسوما" لاتحتوي على حد الخضوع ولذا حدد لها ما يسمى بالحد الاصطلاحي للخضوع أي الإجهاد الذي بناظر تشوها" دائما" قدره 0.2 % ويرمز له بـ $\sigma_{0.2}$

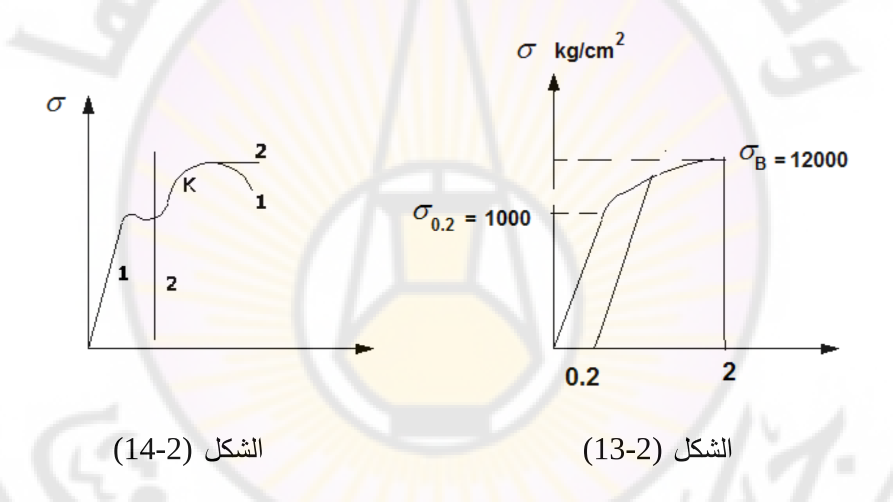
حد المقاومة σ_u :تبدأ المادة ثانية بمقاومتها للتشوهاتبعد نهاية مرحلة اللدونة وبهذه المرحلة تصبح العلاقة بين القوة والتشوه غير خطية فالتشوه يزداد بالشكل أسرع من زيادة القوة ويبقى هذا التزايد حتى تصل إلى النقطة d التي تبلغ عندها قوة الشد الخارجية حدها الأعظمي ،
وبالتالي بلوغ الإجهاد حد المقاومة σ_u ، عندئذ فجأة يظهر على النموذج تقلص وهذا ما يسمى بالرقبة ، الشكل (2-12) فتقل مساحة مقطع النموذج في الرقبة بسرعة ونتيجة لذلك تنخفض القوة والإجهاد الاصطلاحي ويحدث تمزق (أو انفصال) عند أصغر مقطع في الرقبة الذي يؤدي إلى مقطع العينة المدروسة في هذا المكان ذاته .

وهكذا تكون الخواص الميكانيكية المهمة للمواد اللدنة وخاصة الفولاذ هي التالية :
حد التناسب ، حد المرونة ، حد المتانة ويهمنا كذلك عامل المرونة وعامل بواسون ، وفي كثير من الأحيان يهمنا التشوهات الباقية بعد إزالة الحمولة (بعد انكسار العينة) وتبلغ هذه التشوهات $\varepsilon = 0.2$.



الشكل (2-12)

في العديد من الأنواع الخاصة للفولاذ ذات المقاومة العالية يختلف مخطط الشد اختلافاً كلياً عن المخطط الذي درسناه سابقاً ، فمخطط الشد في الفولاذ ذي المقاومة العالية الشكل (2-13) ينقسم إلى مجالين :



الشكل (2-14)　　　　الشكل (2-13)

الأول مستقيم ويتلوه منحني دون المرور بساحة اللدونة وتكون التشوهات الكلية في هذا النوع من الفولاذ قبيل التمزق أقل بكثير منها في الفولاذ 3 ، و هذه الأنواع من الفولاذ تتمزق دون أن يتالشكل فيها اختناق محلي ، وفي هذه المواد نعد اصطلاحياً أن الإجهادات التي تحدث تشوهات لدنة تساوي إلى 0.2%تعين حد المرونة الاصطلاحي في هذه المادة ، وحد المرونة في هذه المواد مرتفع جداً إلا أن حد المرونة إلى حد المتانة في الفولاذ ذي المقاومة العالية أكبر منها في الفولاذ اللين من النوع 3 ، وبالشكل عام في البيتون مسبق الإجهاد يهمنا أن يكون حد المرونة مرتفعاً ، ونستطيع أن نرفع بالشكل اصطناعي من قيمة حد المرونة في الفولاذ الطري وذلك بأن نشده حتى إجهاد يتجاوز حد المرونة وليكن حتى النقطة k الشكل (2-14) .

وبعدها نزيل الحمولة ، وعندها يختفي القسم المرن من التشوهات ويبقى القسم اللدن ، وعند شد القضيب مرة أخرى يرتفع حد المرونة عند الشد في المرة الأولى وبذلك نكون قد رفعنا من مستوى حد المرونة في الفولاذ ، لكن حد المتانة يبقى نفسه وتنقص التشوهات الكلية قبيل التمزق في الفولاذ الجديد وتسمى عملية رفع حد المرونة بعملية التقوية وتستعمل في تحسين خواص الفولاذ الطري بغية استعماله في البيتون مسبق الإجهاد .

وبالإضافة للخواص الميكانيكية للمادة المذكورة أعلاه وعند الاختبار على الشد تحدد أيضاً الاستطالة الدائمة النسبية والتي تعتبر خاصية هامة للدونة المادة .

وتعين الاستطالة الدائمة عند الانفصال (التحطم) بالعلاقة :

$$\delta = \frac{L_1 - L_0}{L_0}.100 \qquad (15-2)$$

حيث :

L_0 – الطول الأولي للنموذج

L_1 – طول النموذج بعد الانفصال

وإن للفولاذ رقم 3 مقدار تحطم $\delta \geq 0.24$ ،

أما بالنسبة للفولاذ عالي المقاومة ينخفض من % (10-7) وهذا المقدار يتعلق بالنسبة بين طول النموذج وأبعاده العرضية لذا يذكر في الدليل مقدار δ بالنسبة لنموذج مثلاً δ_5 يرمز إلى الاستطالة التي كانت محسوبة على نموذج من الدرجة 5 أي على النموذج الذي يتساوى فيه نسبة الطول المحسوب إلى قطره 5 .

إن الاستطالة التي حددت بهذه الطريقة تعتبر استطالة متوسطة نوعاً ما وذلك لأن التشوهات (الانفعالات) توزعت على طول النموذج بصورة غير منتظمة . إن أكثر استطالة حدثت هي في نقطة الانفصال وتسمى عادة بالاستطالة الحقيقية عند التحطم (الانفصال)

إن الخاصة الثانية للدونة المادة هي التضيق النسبي الدائم عند الانفصال (التحطم)

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0}.100 \qquad (16-2)$$

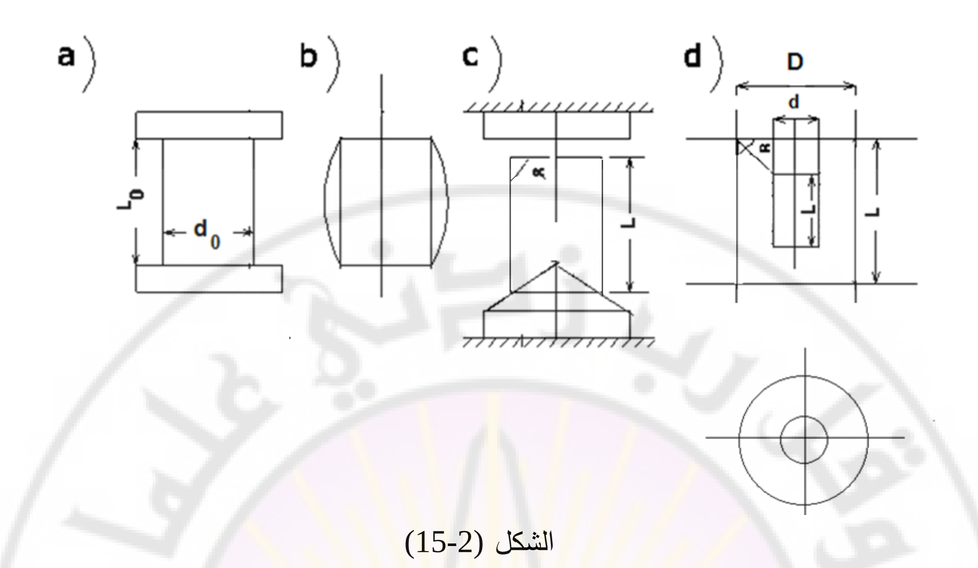
حيث :

A_0 – المساحة الأولية للمقطع العرضي

A – مساحة المقطع العرضي في أضيق مكان في الرقبة بعد الانفصال .
إن مقدار ψ يبين الخواص اللدنة (البلاستيكية) بصورة أكثر دقة من δ وذلك لأنها تتعلق بدرجة أقل بالشكل النموذج . وكلما كانت المادة أكثر لدونة كانت δ أكبر، وإلى المواد اللدنة ينتمي النحاس . الألمنيوم , الفولاذ المنخفض الكربون .
والصفة المعاكسة للدونة هي صفة الهشاشة (التقصف) أي قابلية المادة للانكسار عند التشوهات الدائمة البسيطة . ومقدار التشوه الدائم عند التحطم لمثل هذه المواد لا يزيد على -2) % (5 ، وإلى المواد الهشة ينتمي حديد الزهر ، الفولاذ الصلب ، الحجر ، الزجاج البلاستيكي ، وتجدر الإشارة إلى أن تقسيم المواد إلى لدنة وهشة يعد اصطلاحاً وذلك لأنه تبعاً للشروط (سرعة الإجهاد والحرارة) ونوعية حالة الإجهاد فإن المواد الهشة يمكنها أن تسلك سلوك المواد اللدنة والعكس صحيح .

8-2 اختبار المواد على الضغط – مخطط الضغط

تجرى التجارب على الضغط على نماذج مكعبية أو اسطوانية قصيرة بحيث تكون نسبة الطول إلى القطر مساوية إلى : $\frac{L_0}{d_0} = 1.5$
توضع العينات في المكابس الهيدروليكية مع استخدام صفائح على طرفي العينة متوضعة بالشكل متقن ومتواز ، الشكل (2-15-a) . ويحذر من استخدام النماذج الطويلة في التجارب المخبرية على الضغط حيث باستخدامها ينشأ انعطاف طولي مما يؤدي إلى انحناء محور العينة واستعمال نماذج قصيرة جداً أمر غير مرغوب فيه لأن قوى الاحتكاك الحاصلة بين صفائح المكبس والسطوح الطرفية للعينة تعرقل توسعه ويأخذ النموذج الشكل البرميل كما هو موضح بالشكل (2-15-b) .
وتتعلق نتائج اختبار الضغط بمقدار قوى الاحتكاك، ويمكن تقليل تأثير قوى الاحتكاك على طرفي النموذج بتشحيمها بالبرافين مثلاً .وقد بدأ مؤخراً استعمال نماذج مجوفة ذات نهايات مخروطية السطح الشكل (2-15-c)

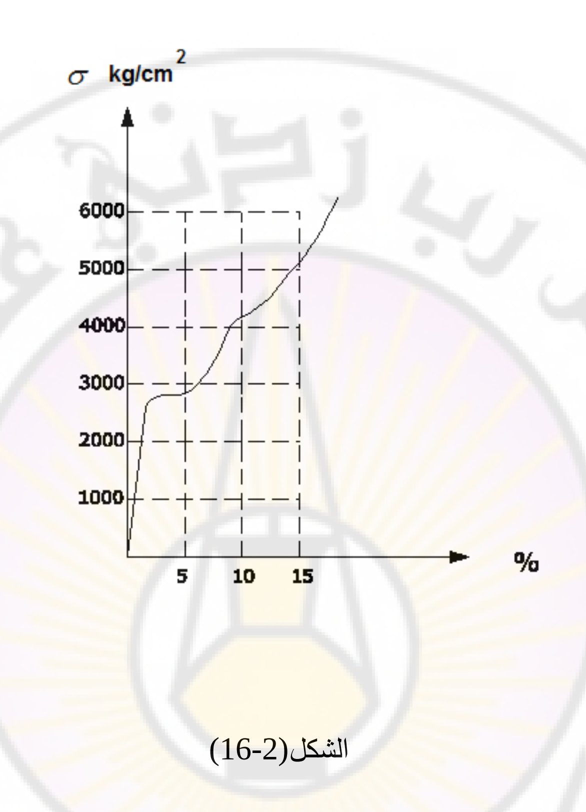


الشكل (2-15)

وباختيار مقدار مناسب للزاوية المخروطية يمكن تقليل قوى الاحتكاك بدرجة كبيرة .
وتختلف مقاييس العينات باختلاف المادة المختبرة , وتتراوح بين مكعبات طول ضلعها (2cm) عند اختبار الخشب إلى مكعبات طول ضلعها (20cm) عند اختبار البيتون .

بعض المواد المستخدمة في البناء تقاوم الضغط كما تقاوم الشد , ومثال ذلك جميع أنواع الفولاذ وفي هذه الحالة يتساوى حد المرونة في حالة الضغط وحد المرونة في حالة الشد.
بعض المواد تقاوم الضغط بالشكل أسوأ من مقاومتها للشد , مثال ذلك بعض أنواع الخشب , وبالشكل عام فإن القسم الأعظم من مواد البناء يقاوم الضغط بالشكل أفضل بكثير من مقاومته للشد كالبيتون والقرميد والحديد , و بعض المواد تقاوم الضغط ولاتقاوم الشد مثل التربة تحت البناء .
عند إجراء التجارب المخبرية على عينات أسطوانية من مادة لدنة بحيث تكون الإجهادات أقل من حد التناسب أو حد المرونة فإن التشوهات النسبية تتناسب مع الإجهادات ويكون مخطط الضغط لـ $\sigma = f(\varepsilon)$ مستقيما" وميل المستقيم هو نفسه في حالة الشد
بعد أن تتجاوز الإجهادات حد المرونة تظهر تشوهات لدنة باقية لا تزول بعد إزالة التحميل فيزداد قطر الاسطوانة المختبرة ويؤدي الاحتكاك بين السطح الأعلى ولأسفل للاسطوانة وبين صفائح المكبس إلى الحد من التشوهات العرضية , لهذا يرافق انكماش الاسطوانة الطولي انتفاخ

في أوسطها والحمولة هنا لا تهبط كما في الشد بل تزداد باستمرار , ونرى في الشكل (2-16) المخطط النموذجي لـ $\sigma = f(\varepsilon)$ في حالة ضغط مادة لينة (الفولاذ الطري).



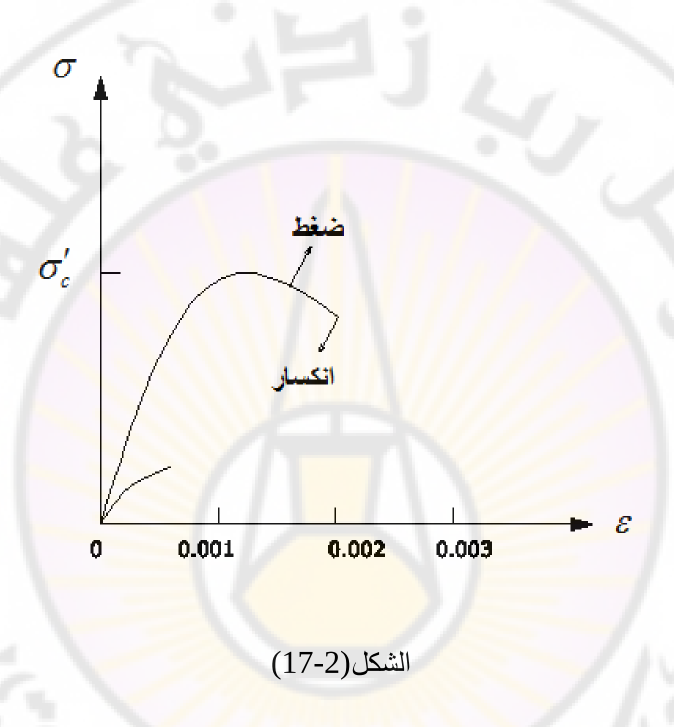
الشكل(2-16)

أما المواد الهشة (المواد الحجرية , الحديد الصلب , والبيتون) فإنها تتحطم بتأثير الضغط كما هو الحال في حالة الشد بعد أن تظهر فيها تشوهات طفيفة .

ففي حالة تحميل موشور من البيتون ذي أبعاد $40\times10\times10$نلاحظ أنه عندما تصل الحمولة إلى 0.7-0.8 من حمولة الكسر تظهر في الموشور شقوق توازي اتجاه القوة الطولية الضاغطة , ولا يزيد انفتاح هذه الشقوق في بداية ظهورها عن 0.01 mm وهكذا فإن تحطم المواشير من المواد الهشة يحدث بسبب استنزاف البيتون للتمزق في المقطع العرضي .

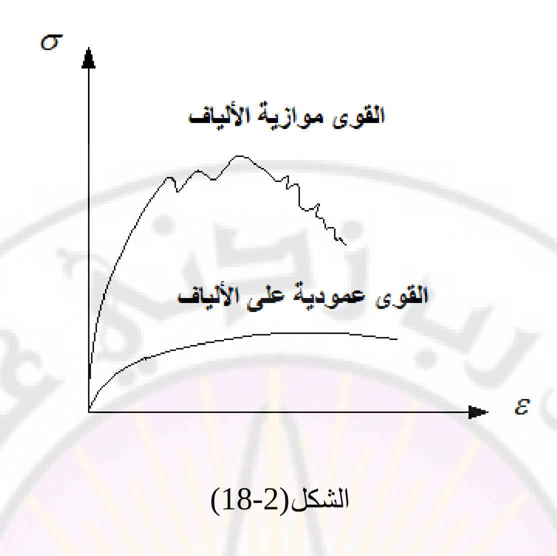
يبين الشكل(2-17)منحى الإجهاد والتشوه لاسطوانة من الخرسانة العادية في حالتي الشد و الضغط . ونظرا" لصغر مقاومة الخرسانة للشد والتي تساوي حوالي % 10 من مقاومتها للضغط (تستخدم الخرسانة أساسا" لمقاومة الضغط , وتهمل عادة مقاومتها للشد)

وبالرغم من أن منحنيات الإجهاد والتشوه للخرسانة تختلف حسب نوع الخلطة فإن جميعها تشترك إلى حد كبير في السلوك العام حيث يتكون المنحني من جزء ابتدائي مستقيم تقريبا" , ثم يبدأ في الانحناء حتى يصل إلى أقصى إجهاد في الضغط σ_c' عند تشوه يساوي 0.002 تقريبا" بزيادة التشوه بعد ذلك يقل الإجهاد تدريجيا" حتى يحدث الانكسار في النهاية.



الشكل(2-17)

أما بالنسبة لمادة الخشب فتختلف مقاومته للضغط عندما تكون القوى المطبقة عمودية على ألياف العينة عنها عندما تكون القوة الطولية الضاغطة موازية لهذه الألياف اختلافا" كبيرا" , ونرى في الشكل(2-18)مخططي $\sigma = f(\varepsilon)$ في كلتيهما ومن المخططين نرى أن متانة الخشب عندما تؤثر القوى بالشكل مواز للألياف أكبر بكثير من متانته عندما تكون القوة عمودية على الألياف , ونلاحظ أن التشوهات الكلية للخشب تكون أكبر بكثير عندما تكون القوى عمودية على الألياف , وتسمى المواد التي تختلف مقاومتها باختلاف اتجاه تأثير القوى الخارجية المطبقة بالمواد غير موحدة الخواص .



الشكل(2-18)

2-9 تأثير بعض العوامل على الخواص الميكانيكية لمواد البناء

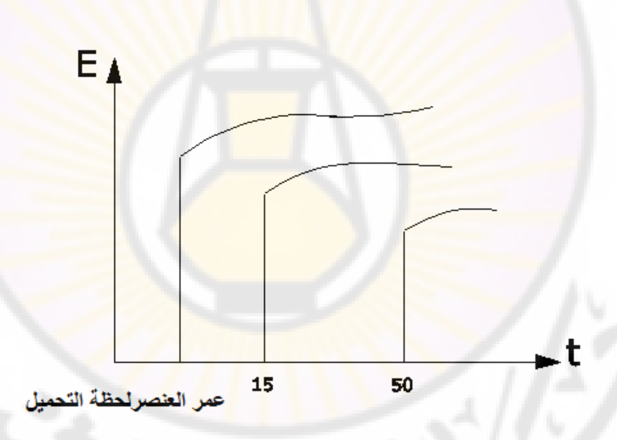
2-9-1 تأثير الحرارة على الصفات الميكانيكية للمواد :

يؤدي ارتفاع درجة حرارة العنصر إلى تناقص في مقاومة العنصر (حد التناسب – حد المرونة – حد السيلان – حد المقاومة) ، وإلى تزايد في المقاومة عند انخفاض درجات الحرارة . ويؤدي ارتفاع درجة حرارة العنصر إلى تزايد في الصفات اللدنة للعنصر (التشوهات النسبية الباقية عند الانقطاع – تشوه المقطع العرضي في منطقة التمزق) . ويؤدي انخفاض درجة الحرارة إلى تناقص في هذه القيم . ويؤدي ارتفاع درجة الحرارة أيضاً إلى انخفاض في عامل مرونة العنصر وإلى تزايد في عامل التشوه العرضي μ . ويؤدي انخفاض الحرارة إلى العكس . وتصل نسبة انخفاض مقاومة العنصر نتيجة ارتفاع الحرارة إلى % 50 (الفولاذ مثلاً بعد رفع درجة حرارته إلى 800 درجة) .

يؤدي استمرار تأثير الحرارة العالية إلى تناقص جديد في مقاومة العنصر ، وندعو بحد المقاومة طويل الأمد للمادة ، الإجهاد الذي يسبب انهيار العنصر المعرض لدرجة حرارة معينة وبعد فترة زمنية مفروضة .

2-9-2 ظاهرة السيلان :

يلاحظ في بعض مواد البناء مثل البيتون و الخشب أن ازدياد التشوهات يستمر حتى بعد توقف ازدياد الأحمال ولمدة طويلة من الزمن ، فلقد تبين من التجارب أننا عند تحميل عمود من البيتون قوة ضغط كبيرة نحصل على تشوهات آنية بعد التحميل مباشرة ، وتشوهات تظهر خلال الزمن ولمدة سنة أو أكثر بعد التحميل ، و كثيراً ما تعادل هذه التشوهات ضعف التشوهات الآنية أو أكثر ، وتسمى هذه التشوهات بتشوهات الزحف أو تشوهات السيلان ، وتتزايد هذه التشوهات مع الزمن بسرعة متناهية في الصغر . وتؤثر على هذه التشوهات العديد من العوامل وبالنسبة لمادة البيتون تكون تشوهات السيلان أكبر كلما كانت الإجهادات أكبر، وكانت مدة التحميل أطول , وعمر البيتون أقل الشكل(2-19) . وتختلف هذه التشوهات من بيتون إلى آخر كما تتأثر كثيرا" بنوع الاسمنت وبتركيب البيتون وبنسبة الماء إلى الاسمنت وبالرطوبة والحرارة وعوامل أخرى .



الشكل(2-19)

القسم المستقيم من المنحنيات بالشكل التشوهات الآنية المرنةوالقسم المنحني بالشكل تشوهات السيلان .

وتعين هذه التشوهات وفق الصيغتين التاليتين:

$\varepsilon_c = \sigma\ c\,(t\,,\tau)$	$(17-2)$	عندما $\sigma < 0.5\,R$
$\varepsilon_c = (A + B\sigma^2)\ c\,(t\,,\tau)$	$(18-2)$	عندما $\sigma > 0.5\,R$

حيث :

$c(t,\tau)$ – عامل تشوهات السيلان ويساوي تشوهات السيلان الناتجة من تأثير إجهاد قدره واحدة الإجهاد.

t– عمر البيتون في اللحظة المدروسة .

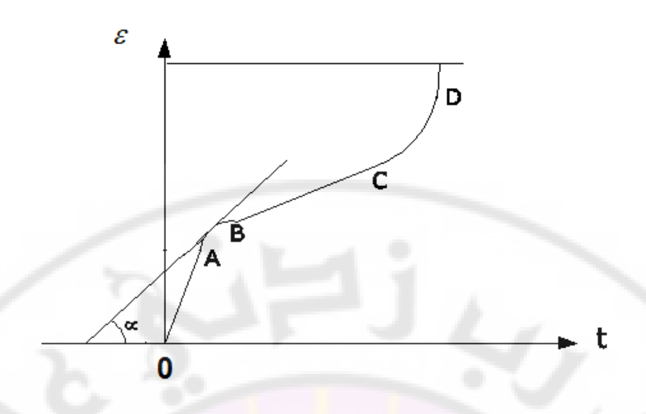
τ – عمر البيتون في لحظة التحميل .

σ – الإجهادات الناظمية في العنصر المدروس .

R– مقاومة البيتونللإنكسار ، A و B ثوابت تجريبية .

يختلف التابع $c(t,\tau)$ من بيتون إلى آخر وهناك نظريات كثيرة حول الشكل هذا التابع . وموضوع سيلان البيتون ما زال حتى يومنا هذا موضع الدراسة في كثير من معاهد الأبحاث في العالم .ونود أن نشير أخيراً إلى أن سبب تزايد التشوهات (نشوء تشوهات السيلان) يعود إلى وجود فجوات صغيرة في البيتون مملوءة بالغازات أو الماء ، وهذه الفجوات تفرغ مع مرور الزمن وتتشوه بتأثير القوى الخارجية ،ويتألف البيتون من مواد مختلفة ذات عوامل مرونة وصفات فيزيائية ميكانيكية مختلفة ، ما يؤدي إلى إعادة توزيع القوى الداخلية بين هذه المواد ونشير أيضاً إلى أن تشوهات المعادن المعرضة لأحمال خارجية وحرارة عالية تتصف بالسيلان ، وتتزايد هذه التشوهات بسرعة متناهية في الصغر حتى التخامد ، أو تتزايد بسرعة ثابتة أو متزايدة حتى تصل إلى انهيار العنصر .

ويبين الشكل (2-20) العلاقة بين التشوهات والزمن ، وتمثل المرحلة الأولى التشوهات المرنة (OA) ، والمرحلة الثانية تشوهات السيلان غير مستقرة (AB) والمرحلة الثالثة تشوهات السيلان المستقرة ذات السرعة الثابتة (BC) والمرحلة الرابعة تشوهات السيلان ذات السرعة المتزايدة والتي تنتهي بانهيار العنصر (DC).

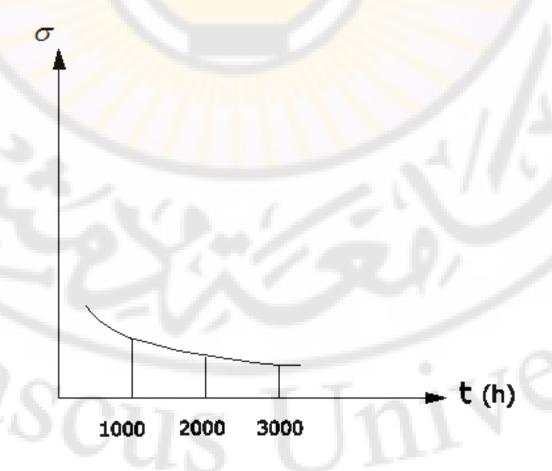


الشكل (2-20)

3-9-2 ظاهرة الارتخاء :

إذا كانت التشوهات الكلية لعنصر محددة مسبقاً وذلك بوجود عناصر إنشائية تمنعه من التشوه اللدن ، وكانت تشوهات هذا العنصر تتصف بالسيلان فإن تزايد التشوهات اللدنة سيحدث على حساب تناقص التشوهات المرنة ، وبالتالي تناقص الإجهادات في العنصر .

ونرى في الشكل (2-21) منحني تناقص الإجهادات مع الزمن في المعادن لدرجات عالية من الحرارة ومحددة التشوهات .



الشكل (2-21)

ومـن المعـروف أن الوصـلات المعدنيـة المنفـذة بواسـطة عناصـر إضـافية معرضـة للشـد أو المعرضـة لدرجات عالية من الحرارة تضعف مع مرور الزمن ولا بد من إعادة شدها بين فترة وأخرى .

4-9-2 تأثير سرعة التحميل

عند اختبـار المعـادن بالشـكل عـام نلاحظ أنهـا تمتلـك جميعهـا خاصـة واحـدة وهـي أن مقاومـة المعدن تزداد مع زيادة سرعة التحميل ، فإذا جرى التحميل بصورة بطيئة تكون المقاومة مساوية لـ % 85 من المقاومة التي نحصل عليها عند التحميل السريع ، وينصح عند إجراء التجارب المخبرية لمعرفة حد السيلان ألا تزيد الإضافة الحاصلة إلى قيم الإجهادات في مجال المرونة عن $100kg/cm^2$ في الثانية الواحدة وذلك لأهمية حد السيلان أثناء تصميم وحساب المنشآت الهندسية على المتانة و الاستقرار .

10-2 الجمل غير المقررة ستاتيكياً في حالتي الشد والضغط

نطلق اسم الجمل غير المقررة ستاتيكياً على الجمل التي لا تكفي معادلات التوازن لتعيين ردود الأفعال في مساندها ، وبالتالي تعيين الإجهادات فيها وفي هذه الجمل لا بد من معادلات إضافية و نحصل عليها من شروط تشوه الجمل المدروسة وتتصف هذه الجمل بصفات عامة وهي :

إن الحالة الإجهادية في عناصر الجملة غير المقررة ستاتيكياً تتوقف على نسب مقاطع هذه العناصر بعضها إلى بعض ، فالمقطع الأكبر في منشأ غير معين ستاتيكياً يأخذ القسم الأكبر من الحمولة والقسم الأصغر يأخذ جزءاً صغيرا" منها .

إن تغير درجة حرارة العنصر غيرالمقرر يولد إجهادات تدعى بالإجهادات الحرارية في حين في الجمل المقررةستاتيكيا" لا تتولد ضمنها أية إجهادات لأنها تستطيع أن تتمدد أو تتقلص دون أي عائق .

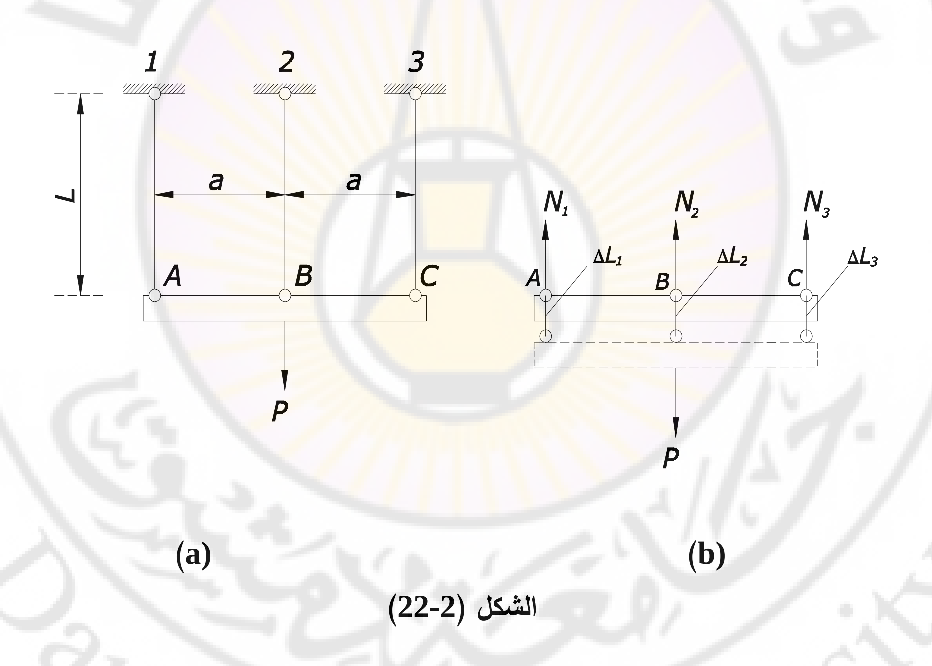
إن هبوط أحد من المساند في العناصر غيرالمقررة يولد إجهادات إضافية في المنشأ

إن عدم الدقة في تحضير واحد من عناصر المنشأ غيرالمقررةستاتيكيا" يحدث إجهادات ابتدائية في المنشأ .

وندرس هنا الجمل غيرالمقررة في حالتي الشد والضغط , كما ندرس تأثير الحرارة وعدم الدقة في صنع العناصر على الجمل غيرالمقررستاتيكيا" , ونوضح حل هذه الجمل غيرالمقررة على عدد من الأمثلة .

مثال (2-3)

يطلب تعيين القوى الداخلية الناتجة في قضبان الجملة المبينة بالشكل(2-22) وذلك تحت تأثير حمولة مقدارها $P = 200\,KN$ مطبقة في منتصف الجائز الأفقي AC علماً بأن هذه القضبان مصنوعة من مادة واحدة ولها نفس مساحة المقطع العرضي أي أن $EA = const$ لجميع القضبان وأن الجائز AC مطلق القساوة .



الشكل (2-22)

الحل :

من الشكل نلاحظ أن القوى الداخلية الناتجة في قضبان الجملة هي قوى شد فإذا اعتبرنا مخطط الجسم الطليق للعنصر الأفقي AC الشكل(2-22-b)

فإننا نحصل من معادلات التوازن :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - p = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow$$

$$N_1.a - N_3.a = 0 \qquad (2)$$

$$N_1 = N_3$$

أي أن معادلات التوازن في هذه الحالة تؤول إلىمعادلة وحيدة بمجهولين وبالتالي لابد من معادلة إضافية تحدد من شروط تشوه الجملة.

يتضح من التناظر في الشكل والتحميل أن الجائز الأفقي AC سيبقى أفقيا" بعد التحميل الشكل(c-22-2) لذلك فإن معادلة التشوه في هذه الحالة

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_3 \qquad (3)$$

$$\frac{N_1 L}{EA} = \frac{N_2 L}{EA} = \frac{N_3}{EA}$$

$$N_1 = N_2 = N_3$$

بتعويض هذه النتيجة في المعادلة (1)

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{P}{3}$$

نلاحظ أن القوى في القضبان الثلاثة متساوية , وذلك لتناظر الجملة من حيث الشكل وقساوات صلابة العناصر EA (يسمى الجداء EA بعامل القساوة أو الصلابة) , وعلى سبيل المثال إذا فرضنا مساحة القضيب الأوسط $A_2 = A$, ومساحة كل من القضيبين الطرفيين $A_1 = A_2 = 2A$, نعوض في (3) فنجد :

$$\frac{N_1}{2} = N_2 = \frac{N_3}{2} \qquad (4)$$

بحل (4),(2),(1) نجد :

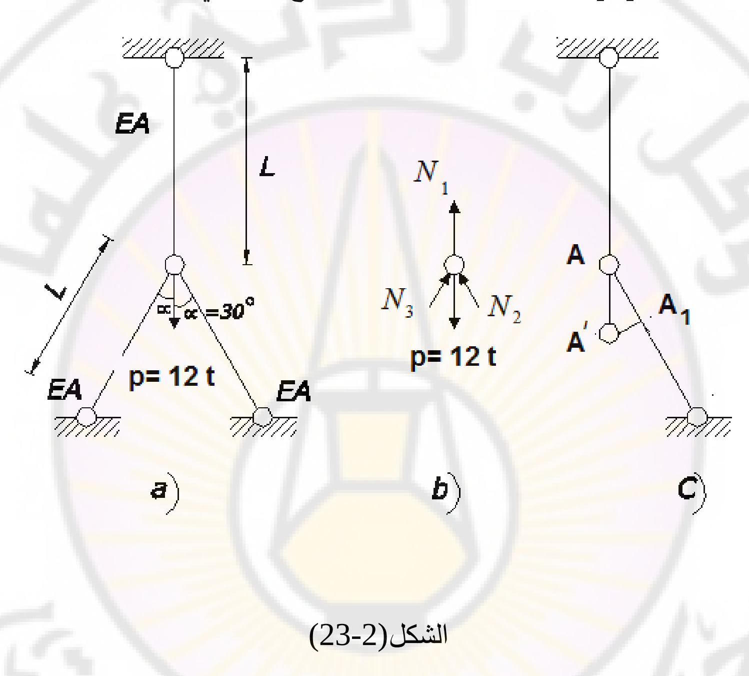
$$N_1 = N_3 = \frac{2}{5} P$$

$$N_2 = \frac{1}{5} P$$

نلاحظ من النتائج أن العنصر ذا المقطع الأكبر والقساوة الأكبر يأخذ القسم الأكبر من الحمولة في حين أن العنصر ذا المقطع الأصغر يأخذ قسما" صغيرا" منها .

مثال (2-4)

يطلب تعيين القوى الداخلية الناتجة في قضبان الجملة المبينة بالشكل(2-23) علماً" بأن هذه القضبان متساوية في الطول ومساحة المقطع العرضي ومنفذة من مادة واحدة . وإذا كانت الإجهادات المسموح بها على الشد والضغط لمادة القضبان مساوية إلى $[\sigma]=1600 \ kg/cm^2$, فما المساحة اللازمة للمقطع العرضي لكل من هذه القضبان؟



الشكل(2-23)

الحل :

يتضح من الشكل (2-23-a) أن المفصل A سينتقل نحو الأسفل تحت تأثير الحمولة P , ولذا فإن القوة الداخلية الناتجة في كل من القضيبين المائلين قوة ضغط , في حين أن القوة الداخلية الناتجة في القضيب الشاقولي قوة شد . فإذا اعتبرنا مخطط الجسم الطليق للمفصل A الشكل (2-23-b) فإننا نحصل من معادلات التوازن على :

$$\sum X = 0 \Rightarrow \qquad (N_2 - N_3)\sin\alpha = 0$$

$$N_2 = N_3$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \qquad N_1 + (N_2 + N_3)\cos\alpha - p = 0$$

$$N_1 + 2N_2.0.866 - 12 = 0$$

$$N_1 + 1.732.N_2 - 12 = 0 \qquad (1)$$

وبما أن الجملة المدروسة متناظرة في الشكل والتحميل والقساوات فإن المفصل A سينتقل نحو الاسفل بمقدار معين . ويتضح من مثلث التشوه الشكل (C-23-2) أن :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA'}} = \frac{|\ \Delta l_2\ |}{|\ \Delta l_1\ |}$$

أي أن :

$$|\ \Delta l_2\ | = |\ \Delta l_1\ |.\cos\alpha$$

$$\frac{N_2\ l}{EA} = \frac{N_1\ L}{EA}\cos\alpha$$

وبالتالي فإن :

$$N_2 = 0.866\ N_1 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (2) , (1) فإننا نحصل على :

$$N_1 = 4.8\,t \qquad , \qquad N_2 = N_3 = 4.16\,t$$

ويتم حساب المساحة اللازمة لمقطع كل من هذه القضبان انطلاقا" من شرط تحقق الإجهادات في جميع القضبان حيث نجد أن :

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4800}{1600} = 3\,cm^2$$

11-2 تأثير تغير درجة الحرارة في الجمل غيرالمقررةستاتيكيا"

إن تغير حرارة العنصر بعد تنفيذه في الوقت الذي تبقى فيه حرارة المساند ثابتة يحدث إجهادات إضافية في العنصر تدعى بالإجهادات الحرارية أي الإجهادات الناتجة عن تأثير تغير درجة الحرارة . والإجهادات الحرارية تنشأ في الجمل غيرالمقررةستاتيكيا" , أما في الجمل غير المقررة فارتفاع درجة الحرارة يرافقه تمدد في العناصر ولايرافقه ظهور إجهادات حرارية لأن تركيب الجملة غير المقررةستاتيكيا" يسمح لها بالتمدد بتأثير الحرارة .

وفي الحالة البسيطة عندما تتشوه مواد البناء في الحالة المرنة نرى أن الإجهادات الحرارية تتناسب طردا" مع عامل المرونة E , وعامل التمدد الحراري α ومع مقدار تغير درجات الحرارة Δt .

وفي الجدول **(2-3)** نورد عوامل التشوه الحراري لبعض مواد البناء.

جدول (2−3)

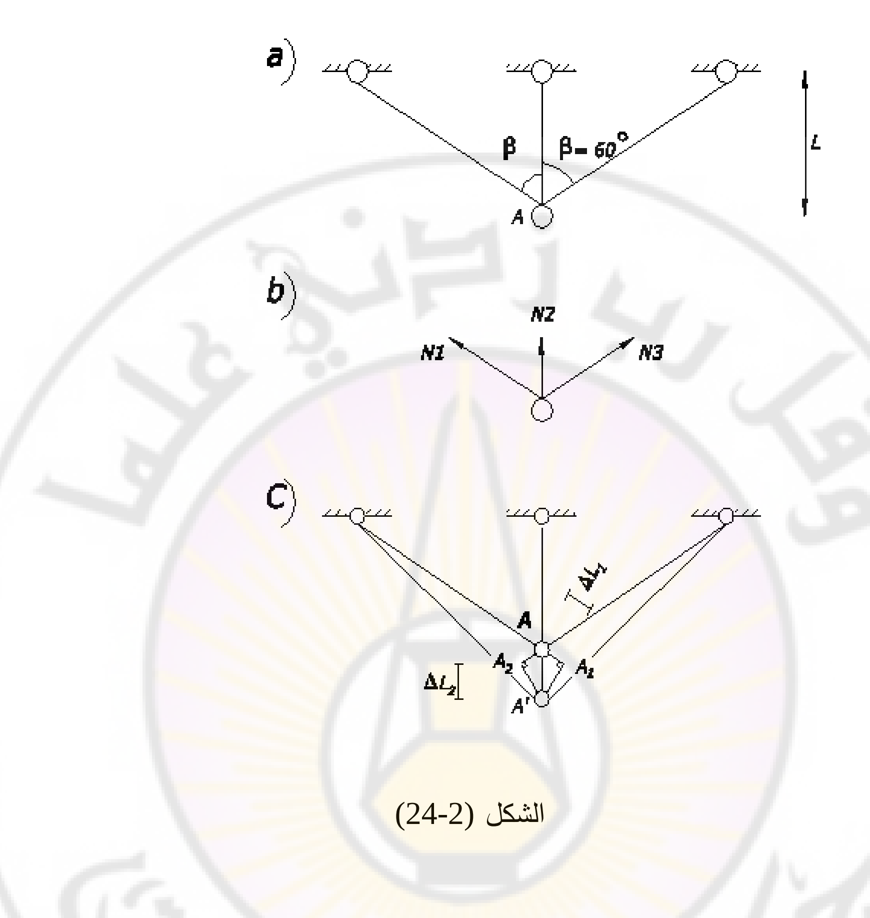
اسم المادة	عامل التمدد الحراري α
ألمنيوم	$(22-25).10^{-6}$
فولاذ	$(10-13).10^{-6}$
نحاس	$(16.5-17.5).10^{-6}$
برونز	$(17-19).10^{-6}$
نيكل	13.10^{-6}
بيتون	$(10-13).10^{-6}$
خشب على طول الألياف	$(2-5).10^{-6}$
البناء بالحجر	$(4-7).10^{-6}$

مثال (2-5)

يطلب تعيين الإجهادات الداخلية الناتجة في قضبان الجملة المبينة بالشكل (2-24) وذلك تحت تأثير ارتفاع في درجة حرارة القضيب الأوسط بمقدار $\Delta t = 20^{\circ} c$ علماً بأن هذه القضبان منفذة من الفولاذ حيث :

$E = 2.10^{6}\, kg/cm^{2}$, $\alpha = 1.10^{-5}$

وأن مساحة المقطع العرضي لكل منها تساوي إلى $F = 10\ cm^{2}$



الشكل (2-24)

بفرض أن القوة الداخلية الناتجة في كل من القضبان الثلاثة هي قوة شد ، فإننا نجد من دراسة توازن المفصل A (الشكل 3-26-b) أن :

$$\sum X = 0 \;\Rightarrow\; (N_1 - N_3)\,.\sin\beta = 0$$

$$N_1 = N_3$$

$$\sum Y = 0 \;\Rightarrow\; (N_1 + N_3)\,.\cos\beta + N_2 = 0$$

$$2N_1.\cos\beta + N_2 = 0 \qquad (1)$$

وبدراسة شروط التشوه في الجملة فإننا نجد أن المفصل A سينتقل شاقولياً نحو الأسفل وذلك نتيجة للتناظر .

ويتضح من مثلث التشوه AA_1A' (الشكل 2-24-C) أن :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2\,.\cos\beta$$

أي أن :

$$\frac{N_1.l}{\cos\beta.EA}=(\alpha.\Delta t.l-\frac{N_2.l}{EA}).\cos\beta$$

وبالتالي فإن :

$$N_1=(\alpha.\Delta t.EA-N_2).\cos^2\beta \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) فإننا نحصل على :

$$N_1=\frac{\alpha.\Delta t.EA.\cos^2\beta}{1+2.\cos^3\beta} \quad , \quad N_2=-\frac{2\alpha.\Delta t.EA.\cos^3\beta}{1+2.\cos^3\beta}$$

أي أن القوة الناتجة في القضيب الأوسط هي قوة ضغط ، في حين أن القوة الناتجة في كل من القضيبين الطرفيين هي قوة شد ، ومن أجل القيم المعطاة في المسألة فإننا نجد أن :

$$N_1=\frac{1.10^{-5}.20.2.10^6.10.(0,5)^2}{1+2.(0,5)^3}=800\ kg$$

$$N_2=\frac{2.1.10^{-5}.20.2.10^6.10.(0,5)^3}{1+2.(0,5)^3}=-800\ kg$$

أي أن $N_1=-N_2=N_3=0,8\ t$

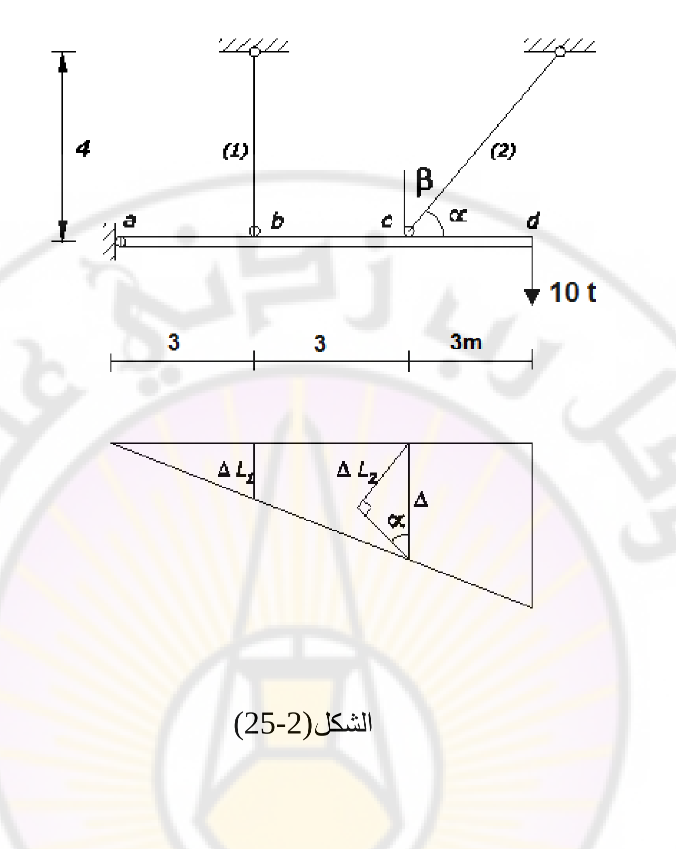
وبالتالي : $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma_3=\frac{800}{10}=80\ kg/cm^2$

مثال (2-6)

يطلب حساب القوى في القضيبين 2-1 تحت تأثير الحمولات الخارجية والمبينة على الشكل(2-25) علما" بأن الجملة قد تعرضت لارتفاع في درجةالحرارة للعنصر (1) بمقدار 60^0 وأن

$$\alpha=10.10^{-6} \quad , \quad E=2,1.10^6\ kg/cm^2$$

مساحة المقاطع العرضية للقضيان متساوية وكل منها يساوي $10\ cm^2$.



الشكل(2-25)

الحل :

يتخذ الجائز الوضعية المبينة بالشكل (b-25-2) نتيجة التشوهات تحت تأثير القوة الخارجية 10 t. إن القضيب 1 يتشوه تحت تأثير الحمولة الخارجية بمقدار λ_s وتحت تأثير ارتفاع درجة الحرارة بمقدار λ_t أي أن التشوه الكلي للقضيب 1 هو :

$$\Delta L_1 = \lambda_s + \lambda_t$$

$$\lambda_t = \alpha . L_1 . \Delta t = 10.10^{-6}.400.60 = 0,24\ cm$$

$$\lambda_s = \frac{S_1 . L_1}{EA_1} = \frac{400.S_1}{2,1.10^6.10} = 1,905.10^{-5}.S_1 \Rightarrow$$

$$\Delta L_1 = 1,905.10^{-5}.S_1 + 0.24$$

تشوه القضيب الثاني هو

$$\Delta L_2 = \frac{L_2 . S_2}{EA} \Rightarrow$$

$$\Delta L_2 = \frac{500.S_2}{2.1.10^6.10} = 2,381.10^{-5}.S_2$$

ومن علاقة تشابه المثلثات : (1) $\frac{\Delta L_1}{\Delta} = \frac{3}{6} \Rightarrow \Delta L_1 = 0,5.\Delta$

نعوض عن قيمة $\Delta L_1 , \Delta L_2$ في (1) حيث $\Delta L_2 = \Delta .\sin\alpha$ فنجد :

$$1,905.10^{-5}.S_1 = 0,24 = 0,5.2,381.10^{-5}.S_2.1,25 \Rightarrow$$

$$S_1 = 0,78117.S_2 - 12598 \qquad (2)$$

وباستخدام معادلة العزوم حول المسند A نجد :

$$300.S_1 + S_2.600.\sin\alpha - 10.900.10^3 = 0$$

$$S_1 + 1,6.S_2 = 30.10^3 \Rightarrow$$

$$S_1 = -1,652 + 30.10^3 \qquad (3)$$

نعوض في (2) فنجد :

$$30.10^3 - 1,6.S_2 S_2 - 12598 \Rightarrow$$

$$S_2 = 17890\ kg = 17,890\ t$$

نعوض في (3) فنجد :

$$S_1 = 1376\ kg = 1,376\ t$$

ويمكن بعد ذلك تعيين ردود الأفعال عند المفصل وذلك باستخدام معادلتي توازن القوى .

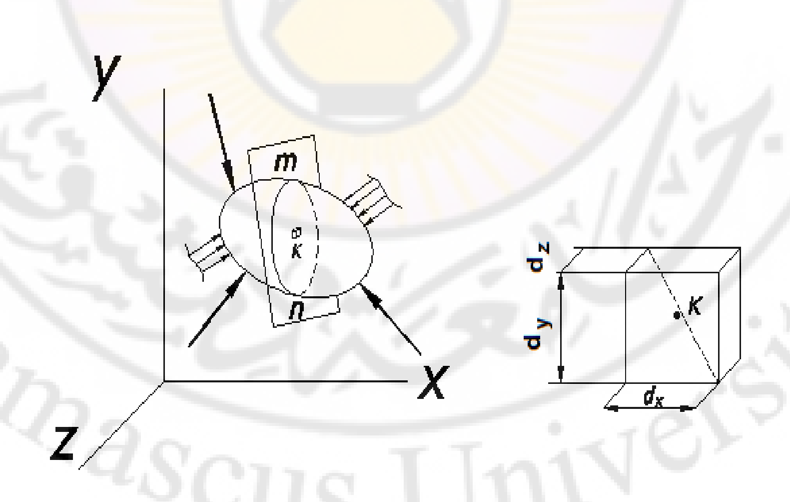
الفصل الثالث

الحالة الإجهادية المستوية

3-1 مفهوم الحالة الإجهادية وأشكالها

الحالة الإجهادية في نقطة من الجسم هي مجموعة الإجهادات المؤثرة في النقطة والموافقة لجميع المساحات (المقاطع) المارة منها .

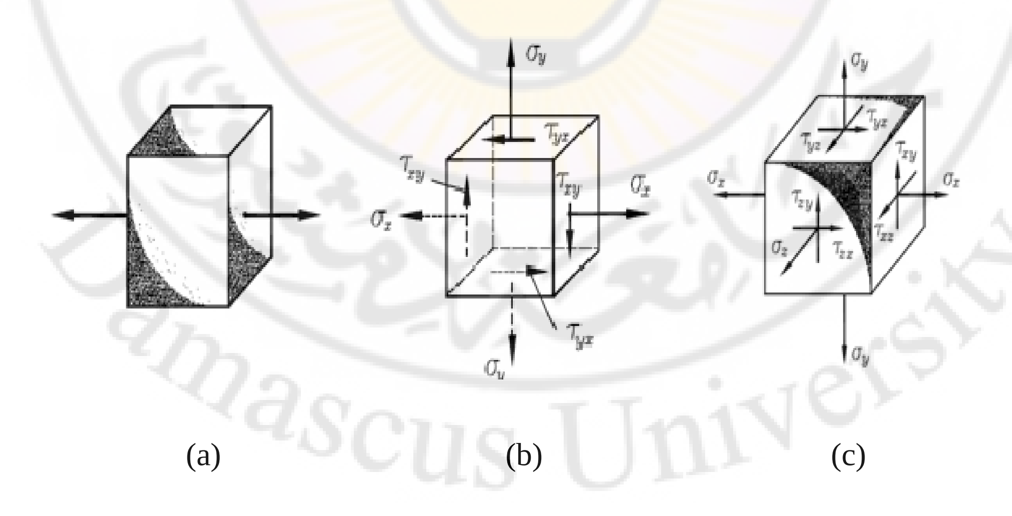
تنشأ الوضعية المستوية للإجهادات في العناصر الإنشائية عندما تكون هذه العناصر بالشكل صفائح أو بلاطات رقيقة مستوية وخاضعة لقوى واقعة في مستويها , كالجدران مسبقة الصنع وجدران الخزانات , فعند دراسة الحالة الإجهادية في نقطة مثل k, نقتطع من حولها عنصر حجمي بالشكل متوازي مستطيلات أبعاده dx , dy , dz الشكل (3-1) وبسبب صغره يمكننا عد أن الحالة الإجهادية في كافة نقاطه واحدة وتوافق الحالة الإجهادية في النقطة المدروسة k , وأن الإجهادات تتوزع على أوجهه بالشكل منتظم.



الشكل(3-1)

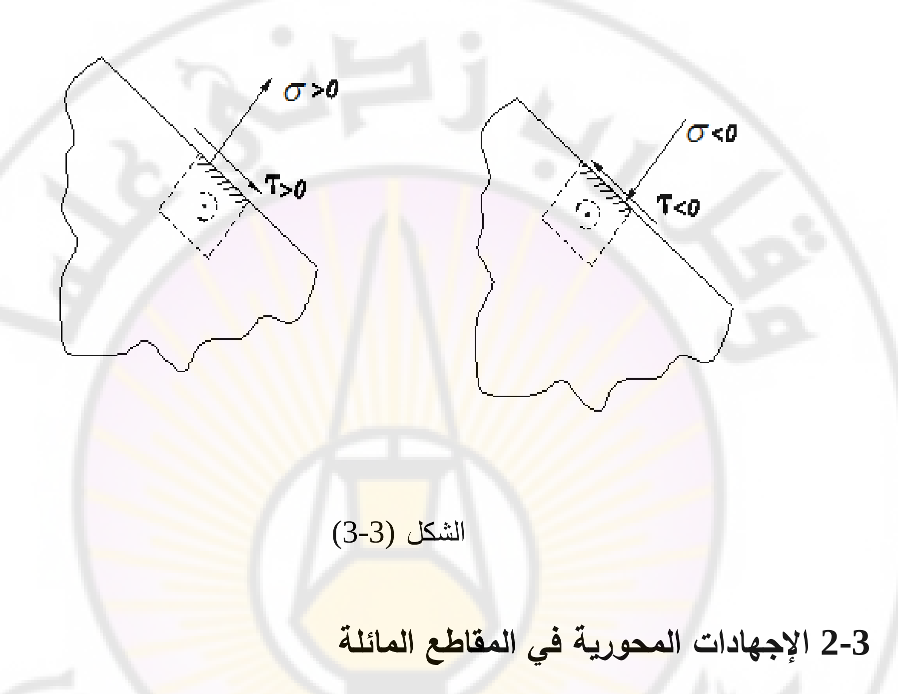
وبالتالي لدراسة الحالة الإجهادية سنعتبر أن الإجهادات المؤثرة على أوجه العنصر الحجمي معلومة وبواسطتها نعين الإجهادات في مقاطع مائلة باستخدام معادلات التوازن للجسم المقطوع نعلم من نظرية المرونة أنه في نقطة من جسم واقع تحت تأثير حمولة يمكننا انتزاع عنصر حجمي ذي وضع معين تكون الإجهادات المماسية على أوجهه معدومة ، وفقاً لذلك يتم التمييز بين الحالات الإجهادية التالية :

- الحالة الإجهادية الخطية (وحيدة المحور) : وفيها تكون الإجهادات على وجهين متقابلين للعنصر المدروس (حالة الشد والضغط المحوري) الشكل (3-2-a)
- الحالة الإجهادية المستوية (ثنائية المحور) : وتصادف بكثرة في مسائل مقاومة المواد والميزة الأساسية لهذه الحالة هي انعدام الإجهادات على وجهين متقابلين للعنصر المدروس الشكل (3-2-b)
- الحالة الإجهادية الحجمية (ثلاثية المحاور) : وتكون الإجهادات موجودة على وجوه كافة العناصر الشكل (3-2-c)



الشكل (3-2)

وتعد الإجهادات الناظمية التي تسبب الشد موجبة والإجهادات التي تسبب الضغط سالبة ، أما الإجهادات المماسية فتعد موجبة إذا كانت تسعى لتدوير العنصر المدروس باتجاه عقارب الساعة وسالبة إذا كانت عكس ذلك الشكل (3-3)

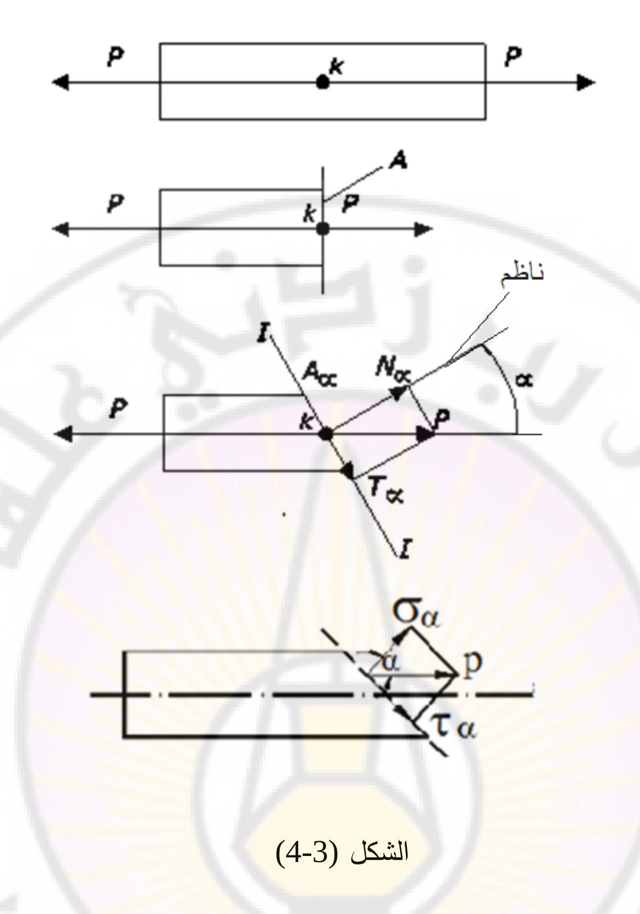


الشكل (3-3)

2-3 الإجهادات المحورية في المقاطع المائلة

رأينا مما سبق أن الإجهادات العمودية في المقطع العرضي للقضيب $\sigma = \frac{P}{A}$ولكن معرفة متانة المادة والشكلها الصحيح يتطلب تحديد قيمة الإجهادات التي تؤثر في أي مقطع مائل للجزء المشدود أو المضغوط .

لتحديد الإجهادات في المستوي المائل I - I على المحور نقطع العنصر بالمستوي I – I الشكل (4-3)



الشكل (3-4)

إن الناظم يالشكل معالمستوي زاوية α مع محور العنصر وحسب طريقة القطع نرمي فرضياً القسم الأيمن و ندرس توازن القسم الأيسر بعد أن نعوض عن الجزء المهمل بقوى موازية للمحور نحلل القوة المحورية P إلى مركبتين : المركبة الأولى ناظمية N_α تالشكل الإجهادات الناظمية في المستوي المائل و المركبة الثانية T_αمماسية تالشكل الإجهادات المماسية في المستوي نفسه . إن التوزع المنتظم لهاتين المركبتين على المساحة A_α للمقطع المائل يؤديان إلى نشوء إجهاد ناظمي ومماسي في كل نقطة من نقاط هذا المقطع وقيمة هذه الإجهادات :

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} \quad ; \quad \tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار :

$$N_\alpha = P.\cos\alpha \qquad ; \qquad T_\alpha = P.\sin\alpha$$

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} \qquad ; \qquad \frac{P}{A} = \sigma$$

نعوض بقيم الإجهادات فنحصل على :

$$\sigma_\alpha = \sigma.\cos^2\alpha \qquad (1-3)$$

$$\tau_\alpha = \sigma.\sin\alpha.\cos\alpha = \sigma.\frac{1}{2}.\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \qquad (2-3)$$

من العلاقات السابقة نلاحظ أن الإجهادات الناظمية و المماسية تختلف باختلاف الزاوية α .

فالإجهادات الناظمية تصل قيمتها العظمى عندما $\alpha = 0$ وبالتالي : $\sigma_{max} = \sigma$، أما الإجهادات المماسية فتصل قيمتها العظمى عندما $\alpha = 45$ وبالتالي :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}.\sigma \qquad (3-3)$$

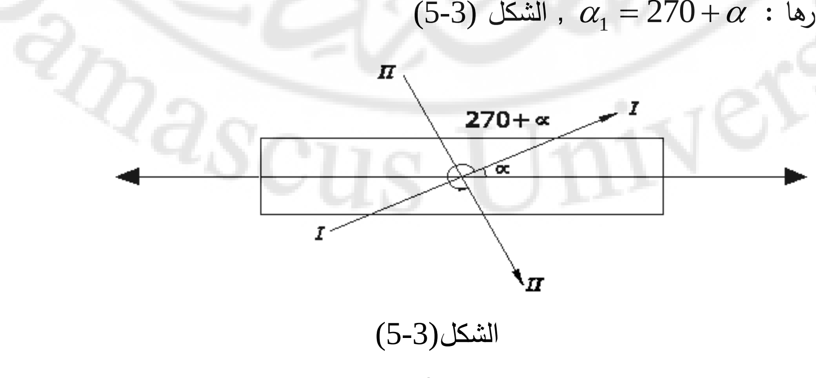
والإجهادات الناظميةوالمماسية في المقاطع الموازية لمحور القضيب تكون مساوية إلى الصفر

$$\sigma_{90} = 0 \quad , \quad \delta_{90} = 0 \quad : \ (\alpha = 90^0)$$

ويعتبر الإجهاد المماسي موجباً عندما يسبب مزدوجة باتجاه عقارب الساعة بالنسبة لأية نقطة من نقاط الناظم الداخلي للمساحة المدروسة .

3-3 قانون ازدواج الإجهادات المماسية :

لنحدد الإجهادات الناظمية "العمودية" والمماسية في المستوي $II-II$ المتعامد مع المستوي المائل $I-I$ مع الأخذ بالاعتبار أن المستوي $II-II$ يالشكل مع محور العنصر زاوية مقدارها : $\alpha_1 = 270 + \alpha$, الشكل (5-3)



الشكل(3-5)

بالنسبة للمساحة المائلة بزاوية α (المستوي $I-I$) لدينا :

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

وبالنسبة للمساحة الأخرى (المستوي $II-II$) يتم تحديد الإجهادات العمودية والمماسية من الصيغ السابقة بعد التعويض عن α بـ $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ نجد :

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 (\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sigma \sin 2\alpha$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin^2 (\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

بتحليل النتائج من مقارنة قيمة الإجهادات الناظميةوالمماسية في المستوي المائل $(I-I)$ وبنظيرتها في المستوي المائل $II-II$ نجد :

أولاً : الإجهادات الناظمية في مستويين مائلين متعامدين في حالة الشد أو الضغط مختلفة , مجموعهما ثابت ويساوي الإجهاد الناظمي في المقطع العرضي العمودي على محور العنصر

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma \cos^2 \alpha + \sigma \sin^2 \alpha = \sigma$$

ثانياً : الإجهادات المماسية في مستويين مائلين متعامدين نتيجة إلى نقطة تلاقي المستويين وهي إجهادات متساوية في القيمة ومختلفة في الإشارة :

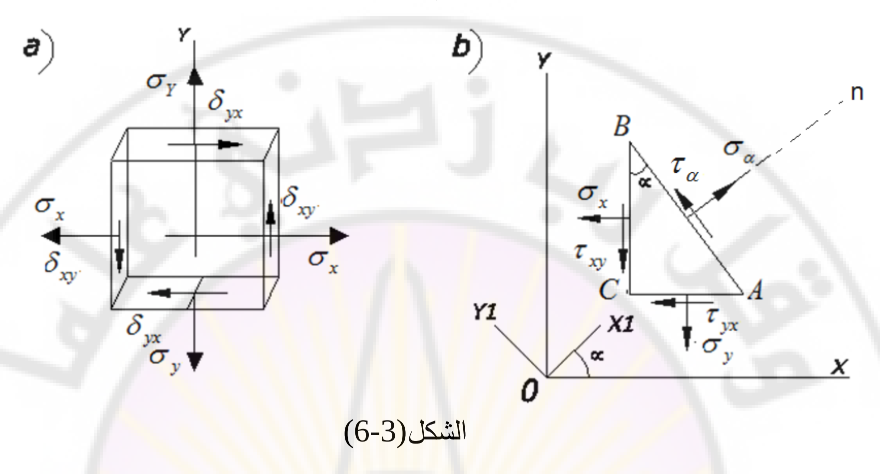
$$\tau_\alpha = -\tau_\beta \qquad (4-3)$$

وهذا ما يدعى بقانون الإجهادات المماسية والذي يعد ليس فقط في حالة الإجهادات الوحيدة المحور إنما أيضاً في جميع الحالات الإجهادية .

4-3 الإجهادات الرئيسية في المستويات المائلة

لتعيين الإجهادات الرئيسية في المقاطع المائلة لحالة إجهادية مستوية بالطريقة التحليلية , نقطع متوازي المستطيلات المبين بالشكل (a-6-3) بمستوٍ مائل عمودي على المستوي xy

وندرس توازن أحد الأجزاء المقطوعة والذي يكون عبارة عن موشور الشكل(b-6-3) . وضع المقطع المائل والمحاور x_1, y_1 المتعلقة به نعينها بالزاوية α والتي تعد موجبة إذا كان الدوران من إتجاه المحور x إلى المحور yيتم بأقصر طريق .



الشكل(6-3)

لإيجاد $\sigma_\alpha , \tau_\alpha$ نسقط جميع القوى المؤثرة أوجه الموشور على المحاور x_1 , y_1 :

$$\sigma_\alpha AB - \sigma_x .BC.\cos\alpha - \sigma_y AC.\sin\alpha - \tau_{xy} BC.\sin\alpha - \tau_{yx} AC.\cos\alpha = 0$$

$$\tau_\alpha AB - \sigma_Y AC \cos \sigma_x BC \sin\alpha - \tau_{xy} BC \cos\alpha + \tau_{yx} AC \sin\alpha = 0$$

إلا أن :

$$AC = AB\sin\alpha \qquad , \qquad BC = AB\cos\alpha$$

بعد التبديل عن BC و ACوالإختصار على ABوإعتبار أن $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

وكذلك:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

نحصل :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad (5-3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \qquad (6-3)$$

وباستخدام العلاقتين المثلثتين :

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

فإن العلاقة (4-5) تأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad (7-3)$$

ولإيجاد الإجهاد في مساحة عمودية على الوجه ABنعوض في العلاقة (4-5) عن α بـ $\alpha+90$ فنحصل :

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

ونلاحظ أن :

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_x + \sigma_y = const \qquad (8-3)$$

$\alpha+90$ فنحصل :

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

ونلاحظ أن :

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_x + \sigma_y = const \qquad (9-4)$$

5-3 دراسة تغيرات الإجهادات الرئيسية في الحالة الإجهادية المستوية وتحديد ساحاتها

عادة تحظى أعظم قيمة للإجهاد الناظمي وتوجيه المستوي الذي يتعرض لهذا الإجهاد بالاهتمام الأول ويتم تحديد المستويات التي تتعرض لأعظم أو أصغر إجهادات ناظمية باشتقاق العلاقة(3-7) بالنسبة للزاوية α وبجعل هذا المشتق مساوياً للصفر نحصل على ميل الساحات :

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\right) = 0 \qquad (9-3)$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\,\tau_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_\alpha = 0 \qquad (10-3)$$

وهذا يعني أن الإجهادات المماسية تكون معدومة على الساحة التي تؤثر عليها إجهادات ناظمية أعظمية أو أصغرية . هذه الساحات تسمى بالساحات الرئيسية والإجهادات الموافقة تسمى بالإجهادات الرئيسية في النقطة المدروسة . وبالتالي فإن الإجهادات الناظمية العظمى والصغرى تعمل على مستويين متعامدين يمكن تحديدهما من قيمة الزاوية :

$$tg\,2\alpha_0 = -\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (11-3)$$

وبما أن $tg\,2\alpha_0 = tg\,2(\alpha_0 + \frac{\pi}{2})$, فإننا تستنتج أن هناك قيمتين للزاوية هما $\alpha_0\ ,\ \alpha_0 + 90$.

بتعويض كل من هاتين القيمتين للزاوية α في العلاقة (3-6) نجد أن الإجهادات المماسية في هاتين الساحتين تساوي الصفر أي أن :

$$\tau_{\alpha_0} = 0 \quad , \quad \tau_{\alpha_0} + 90 = 0$$

ويعرف المستويان "الساحتان" المحددان بهاتين الزاويتين بأنهما المستويان الرئيسيان ويدعى الإجهادان الناظميان العاملان عليهما بالإجهادين الرئيسين "الأساسين وهما يمثلان أكبر قيمة للإجهاد الناظمي وأصغر قيمة له على العنصر المفترض .

ويمكن إيجاد قيمة هذه الإجهادات بتعويض الزاوية α بقيمتها α_0 في العلاقة(3-5) مع استخدام قوانين المثلثات المعروفة :

$$\sin 2\alpha_0 = \pm \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}}$$

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}}$$

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha_0)$$

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha_0)$$

وبعد التعويض والإختصار نحصل على الصيغة التالية لتحديد الإجهادات الرئيسية :

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2} \qquad (12-3)$$

ولتعيين الساحة الرئيسية ذات الإجهاد الناظمي (الأعظمي أو الأصغري), فإننا نحسب قيمة الإجهاد الناظمي σ_{α_0} وذلك باستخدام العلاقة (3-5) فإذا كانت $\sigma_{\alpha_0} = \sigma_{\max}$ فإننا نستنتج أن الساحة الأعظمية هي الساحة المحددة بالزاوية α_0 وتكون الساحة الأصغرية عندئذ هي الساحة المحددة بالزاوية $90 + \alpha_0$.

وللحصول على قيمة الإجهادات المماسية لعنصر معرض للشد والضغط باتجاهين وذلك في الساحة المحددة بالزاوية γ_0 . نتبع نفس الخطوات السابقة فنجد :

$$tg\, 2\gamma_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2.\tau_{xy}} \qquad (13-3)$$

وبمقارنة العلاقتين (3-11) , (3-13) فإننا نجد أن :

$$\cot g\, 2\gamma_0 = -tg\, 2\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma = 2\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي فإن :

$$\gamma = \alpha_0 \pm \frac{\pi}{4} \qquad (14-3)$$

أي أن ساحات الإجهادات المماسية الأعظمية أو الأصغرية تميل على الساحات الرئيسية بزوايا قدرها 45^0 وتعطى قيمة هذا الإجهاد بالعلاقة :

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2} \qquad (15-3)$$

وبمقارنة العلاقتين (4-12), (4-15) فإننا نستنتج أن :

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad (16-3)$$

وبتعويض قيمة الزاوية γ_0في العلاقة (4-5) نجد أن قيمة الإجهادات الناظمية في ساحات الاجهادات الأعظمية أو الأصغرية تعطى بالعلاقة :

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{mhn}}{2} \qquad (17-3)$$

ولتعيين الساحة ذات الإجهاد المماسي الأعظمي أو الأصغريفإننانحسب قيمة الإجهاد المماسي τ_{γ_0} وذلك باستخدام العلاقة (3-6) فإذا كانت هذه القيمة مساوية إلى $\tau_{\gamma_0} = \tau_{max}$ فإننا نستنتج أن الساحة ذات الإجهاد المماسي الأعظمي هي الساحة المحددة بالزاوية γ_0 وتكون الساحة ذات الإجهاد المماسي الأصغري عندئذ هي الساحة المحددة بالزاوية $90^0 + \gamma_0$.

مثال (3−1)

لدينا الصفيحة المستوية المبينة بالشكل (3−7) والخاضعة لتأثير الإجهادات المستوية حيث :

$A\,(400\,,100)$ نقطة من الساحة الشاقولي

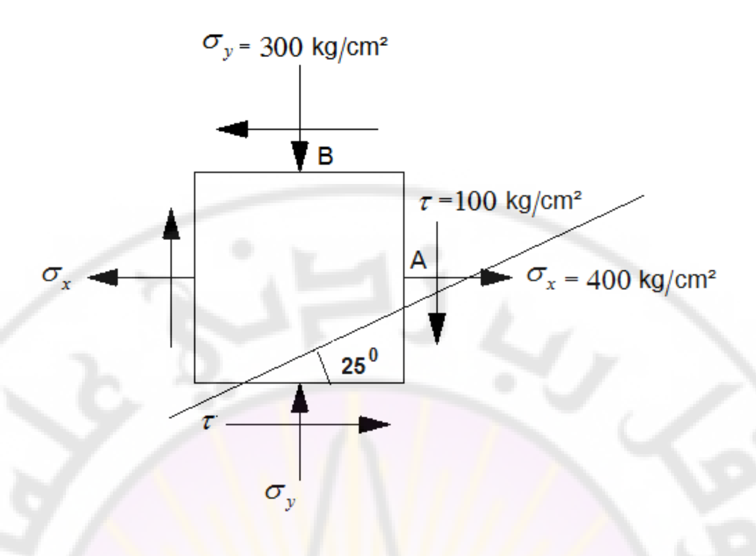
$B(-300,-100)$ نقطة من الساحة الأفقية

والمطلوب :

−حساب الإجهادات الناظمية على المستوي $\mathrm{I-I}$ والذي يميل على الأفق بزاوية 25°

−حساب الإجهادات الرئيسية وميل هذه الساحات

−تعيين قيمة الإجهادات الأعظمية والأصغرية وميل هذه الساحات وذلك بالطريقة التحليلية



الشكل(3-7)

الحل :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y sis^2 \alpha - \tau_y \sin 2\alpha$$

الزاوية α هي الزاوية بين المستوي والشاقول أو الناظم والأفق وتؤخذ موجبة إذا كان المستوي على يسار الشاقول وسالبة إذا كان المستوي على يمين الشاقول وفي حالتنا هذه $\alpha = -65$ نعوض فنجد:

$$\sigma_\alpha = 400\cos^2(-65) + -300\sin^2(-65) - 100\sin(-130) = -98.37\ kg/cm^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_y \cos 2\alpha$$

$$\frac{400+300}{2}\sin(-130) + 100\cos(-130) = -332{,}39\ kg/cm^2$$

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{400-300}{2} \pm \sqrt{(\frac{400+300}{2})^2 + (100)^2}$$

$$= 50 \pm 364 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} = 414\, kg/cm^2 \qquad , \qquad \sigma_{\min} = -314\, kg/cm^2$$

$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = -\frac{2.100}{-300-400}$$

$$\Rightarrow 2\gamma_0 = -15{,}93 + \pi\, k \Rightarrow \alpha_0 = -7{,}97 + \frac{\pi}{2}k$$

$$k = 0 \Rightarrow \alpha_{01} = -7.97$$

$$k = 1 \Rightarrow \alpha_{02} = 82{,}03$$

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\, 364\, kg/cm^2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 50\, kg/cm^2$$

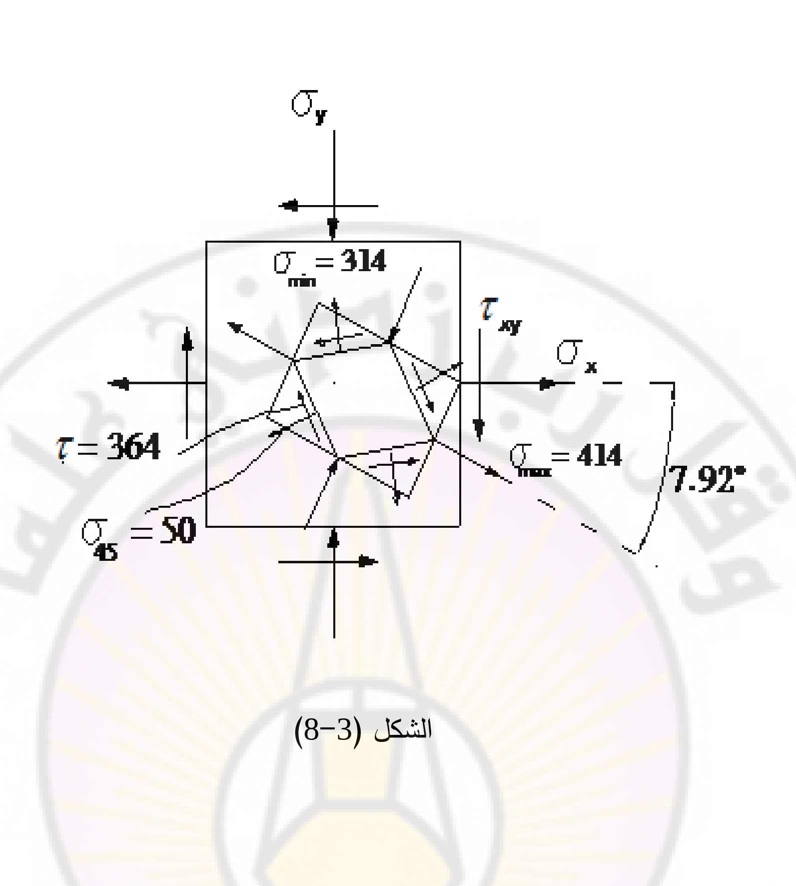
$$tg\, 2\gamma = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_y} = \frac{400+300}{2.200}$$

$$2\gamma = 74{,}05 + \pi k \Rightarrow \gamma = 37{,}03 + \frac{\pi}{2}k$$

$$k = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 37{,}03$$

$$k = 1 \Rightarrow \gamma_2 = 127{,}03$$

و يبين الشكل (3-8) نتائج الدراسة التحليلية للوضعية الإجهادية الناتجة في الصفيحة المدروسة.



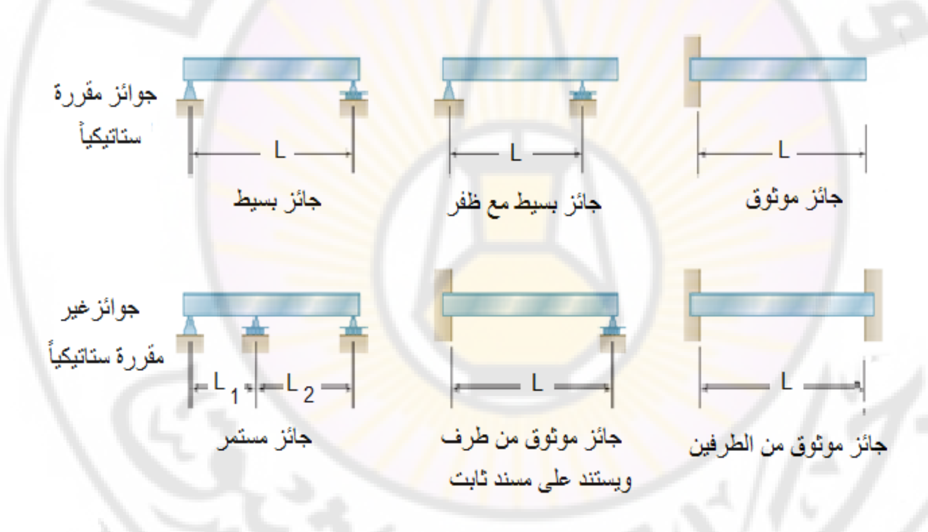
σ_y
$\sigma_{min} = 314$
τ_{xy}
σ_x
$\tau = 364$
$\sigma_{max} = 414$
7.92°
$\sigma_{45} = 50$

الشكل (3-8)

الفصل الرابع
الانعطاف البسيط

1-4 القوى الخارجية – المساند و ردود الأفعال

غالباً ما تتعرض العناصر الانشائية لتأثير أحمال العرضية يمر مستوى تأثيرها بمحور القضيب مما يسبب انحناء محوره , وتدعى القضبان التي تعمل على الانعطاف بالجوائز.
ويبين الشكل (a–1–4) أنواع الجوائز الشائعة الاستخدام في الحياة العملية



الشكل (a–1–4)

نبدأ بدراسة الانعطاف البسيط أو الانعطاف المستوي أي الانعطاف الحادث من قوى واقعة في المستوي الرئيسي للجائز و يمر هذا المستوي بمحور الجائز و يقسمه إلى قسمين متناظرين . وتكون دراسة انعطاف جائز حسب الترتيب التالي :

- الشكل التحميل الناتج عن القوى الخارجية المؤثرة على الجائز
- تحديد ردود الأفعال على المساند ثم دراسة القوى الداخلية (عزوم الانعطاف و قوى القص) في المقاطع العرضية للجائز .
- إيجاد الإجهادات في مقاطع الجائز المنعطف .

- إيجاد الدساتير لاختيار مقاطع الجائز .
- دراسة معادلة الخط المرن للجائز المنعطف و تعيين سهم الهبوط في مقطع من الجائز

إن التشوهات الناتجة عن الانعطاف – شأنها في ذلك شأن جميع التشوهات المرنة صغيرة جداً . لذا فإننا نهمل تغير مواقع القوى الخارجية و انتقال المساند و تغير طول الجائز الناتجة عن هذه التشوهات . كما أننا نستطيع أن نطبق مبدأ استقلال تأثير القوى الخارجية الذي على أساسه ندرس أثر كل قوة على حدة ، ثم نجمع هذه الآثار ، و يدعى هذا المبدأ عادة بمبدأ جمع الآثار .

1- الحمولات : نحَمل الجائز بحمولات مركزة تقاس بوحدة القوى t, kgf و بالجملة الدولية KN أو بحمولات موزعة بانتظام و تقاس بوحدة القوى على وحدة الطول kgf/m أو t/m أو kN/m أو بمزدوجة تقاس بوحدة العزوم $t.m$ ، $kgf.m$ أو $kN.m$ كما يمكن أن تحمل الجوائز بحمولات موزعة وفقاً لشكل معين أو بمجموعة من هذه الحمولات .

2- ردود الأفعال : تستند الجوائز البسيطة على مسندين أحدهما متحرك و الآخر ثابت ، أو على مسند واحد موثوق . و في كلا الحالتين تشكل ردود الأفعال الثلاثة مجاهيل تعيَّن من معادلات التوازن الثلاث :

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum M = 0$$

و تعبر هذه المعادلات عن توازن القوى الخارجية و الداخلية المؤثرة على الجائز .
و تعني المعادلة الأولى أن مسقط جميع القوى الخارجية و ردود الأفعال على المحور X يساوي الصفر

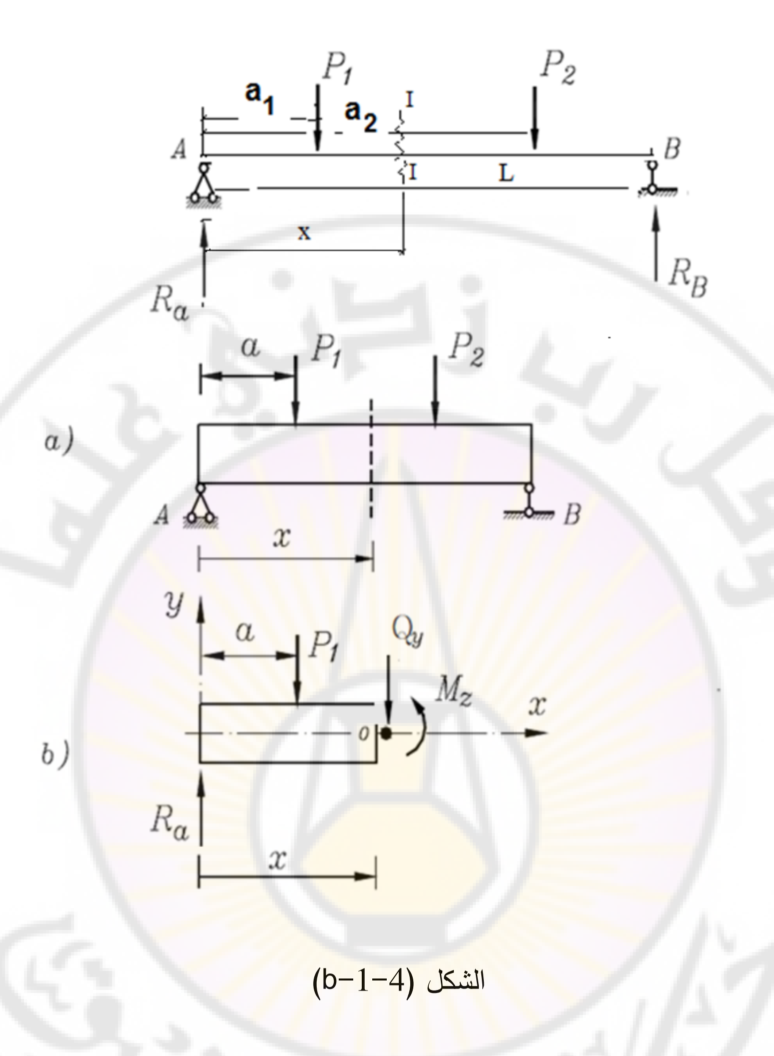
و تعني المعادلة الثانية أن مسقط جميع القوى الخارجية و ردود الأفعال على المحور Y يساوي الصفر .
أما المعادلة الثالثة فتعني أن مجموع عزوم جميع القوى الخارجية و الداخلية (ردود الأفعال) بالنسبة لنقطة ما من الجائز تساوي الصفر .

تخضع الجوائز لحمولات شاقولية (عمودية على محور الجائز). و عندما تكون الحمولات مائلة يمكننا تحليلها إلى مركبتين واحدة عمودية على محور الجائز و الأخرى منطبقة على محوره . و تؤدي المركبة الأولى إلى انعطاف الجائز ، بينما تؤدي المركبة الثانية إلى ضغط أو شد جزء من الجائز ، و هكذا فإن الجائز يخضع إلى تأثير قوى ناظمية (ضغط أو شد) و انعطاف ناتج عن القوى العمودية على محور الجائز .

4−2 عزم الانعطاف و قوة القص في مقطع ما :

بعد إيجاد ردود الأفعال يمكننا تحديد محصلة القوى الداخلية في أي مقطع من الجائز .
لنقطع الجائز على مسافة x من المسند A و ليكن المقطع $I-I$ الشكل (4−1−b) .

نقسم نظرياً الجائز إلى قسمين أيمن وأيسر ولكي يبقى كل من القسمين في وضعية التوازن , لا بد أن تؤثر في المقطع I – I وعلى كل من جزئي الجائز قوة Q ومزدوجة M وتعيَّن هذه القوى من شروط توازن كل من جزئي الجائز على حدة .



الشكل (b-1-4)

عندما ندرس توازن الجزء الأيمن نرمي الجزء الأيسر ونستعيض عنه بتأثيره على القسم الأيمن وذلك بالقوة Q_y والعزم M_z. وتعيَّن القوة Q_y بالمجموع الجبري لمساقط القوى – الواقعة إلى يسار أو يمين المقطع – على المحور الشاقولي ويعيَّن العزم M_z بالمجموع الجبري لعزوم هذه القوى وذلك بالنسبة لمركز ثقل المقطع المدروس.

ونسمي القوة Q_y بقوة القص في المقطع I–I والعزم M_z بعزم الانعطاف في المقطع I–I.

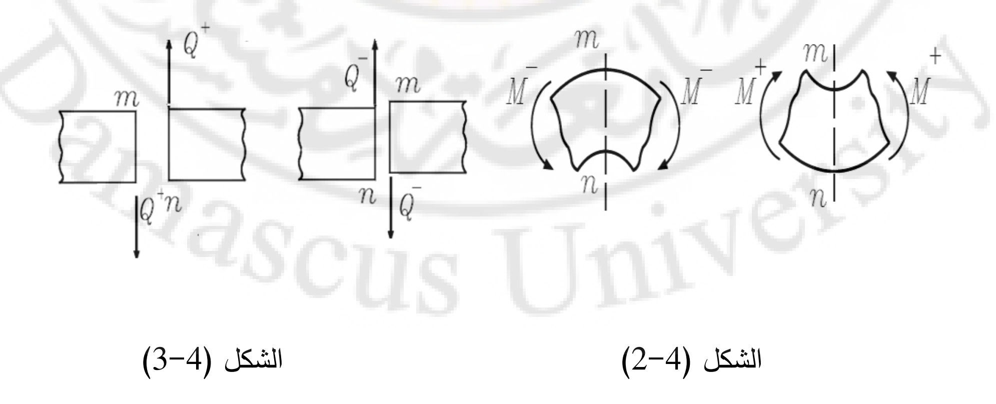
في الشكل السابق وبأخذ القسم اليساري فقط لدينا:

$$Q_y = R_A - P_1$$
$$M_z = R_A.x - P_1(x - a_1)$$

أما بأخذ القسم اليميني للجائز فنجد أن عزم الانعطاف في مقطع ما موجباً إذا كان مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الجزء الأيسر من المقطع بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي (أي العزم الحاصل) متجهاً وفق عقارب الساعة, ونعتبره سالباً إذا اتجه العزم الحاصل للقوى الخارجية على يسار المقطع عكس عقارب الساعة. أما إذا ناقشنا توازن القسم الأيسر من الجائز فإننا نعتبر عزم الانعطاف موجباً إذا كان مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الجزء الأيمن من المقطع بالنسبة لمركز ثقل المقطع (العزم الحاصل) متجهاً عكس عقارب الساعة, ونعتبره سالباً إذا اتجه العزم الحاصل للقوى الخارجية على يمين المقطع وفق عقارب الساعة الشكل (4−2).

ونعد جهد القص في مقطع ما موجباً إذا كان مجموع مساقط القوى المؤثرة على الجزء الأيسر من المقطع على العمود المقام على محور الجائز متجهاً نحو الأعلى, ونعتبره سالباً إذا كان هذا المجموع متجهاً نحو الأسفل.

أما القسم الواقع على يمين المقطع فعلى العكس تماماً, فإذا اتجهت محصلة القوى الخارجية الواقعة على يمين المقطع إلى الأعلى اعتبر جهد القص في المقطع سالباً، وإذا اتجهت إلى الأسفل اعتبر موجباً، ونوضح ذلك في الشكل (4−3).



الشكل (4−3) الشكل (4−2)

3-4 مخطط عزم الانعطاف وقوة القص :

إن الإجهادات في مقطع ما تتعلق بقيمة العزم M وقوة القص Q في ذلك المقطع لذلك يجب معرفة كيف تتغير M, Q على طول الجائز وذلك لتحديد المقاطع الخطرة التي تكون الإجهادات فيها أعظمية.

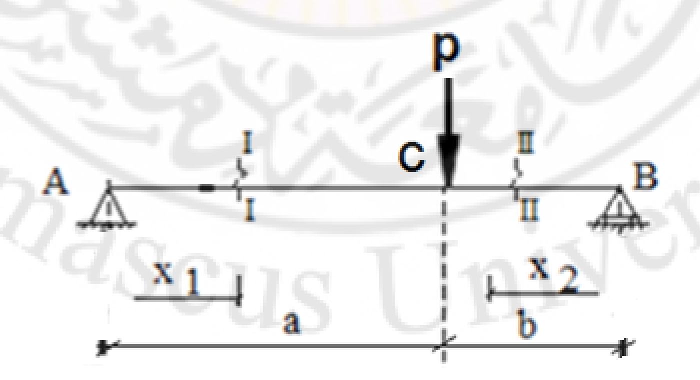
لهذا الغرض يعبر عن تغير العزم M وقوة القص Q بصورة تخطيطية لذلك نرسم محوراً موازياً لمحور الجائز كمحور الفواصل ونرسم منحنيين بحيث تحدد التراتيب تغير قيم M و Q. حيث إن المنحني الأول يدعى مخطط العزم والمنحني الثاني مخطط القص.

نرسم مخطط العزم الموجب تحت محور الجائز ومخطط العزم السالب فوق المحور . كما ترسم مخطط القوى القاصة الموجب فوق محور الجائز والسالبة تحت المحور

أمثلة على دراسة عزوم الانعطاف

مثال 4-1

يطلب رسم مخطط العزوم ومخطط قوى القص في الجائز البسيط المستند على مسندين والمعرض لحمولة مركزة P. الشكل (4-4).



الشكل (4-4)

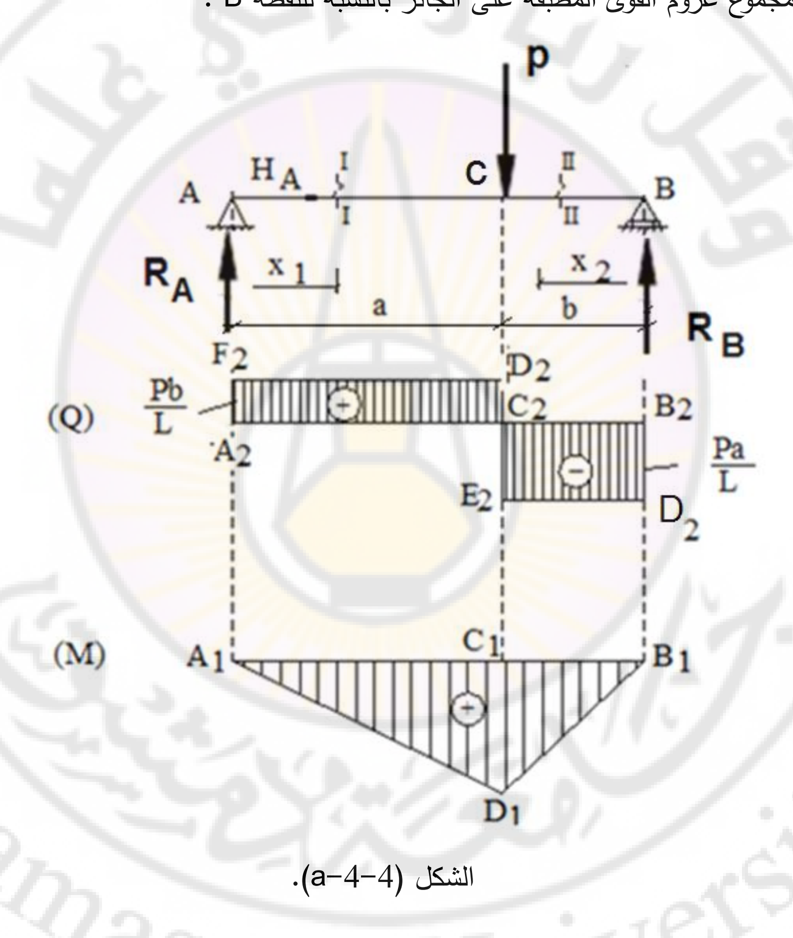
الحل:

لنفرض أن لردود الأفعال R_A و R_B و H_A الاتجاهات المبينة في الشكل (4-4-a).

ولنعين قيم ردود الأفعال من معادلات التوازن ولنبدأ بشرط التوازن بالنسبة لمحور الجائز والذي ينص على أن مجموع مساقط جميع القوى المطبقة على محور الجائز يساوي الصفر.

ونظراً لعدم وجود قوى خارجية أفقية نجد أن رد الفعل الأفقي يساوي الصفر.

لنأخذ مجموع عزوم القوى المطبقة على الجائز بالنسبة للنقطة B :



الشكل (4-4-a).

$$\sum M_B = O \Rightarrow R_A.l - P.b = O$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{P.b}{l}$$

نأخذ مجموع عزوم القوى المطبقة على الجائز بالنسبة للنقطة A :

$$\sum M_A = O \Rightarrow -R_B.l + P.a = O$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{P.a}{l}$$

وللتأكد من صحة النتائج السابقة نأخذ مجموع مساقط جميع القوى المطبقة على المحور
: y = 0

$$R_A - P + R_B = 0 \qquad \Rightarrow R_A + R_B = P$$

ومن الضروري دائماً التحقق من صحة ردود الأفعال قبل البدء بدراسة عزوم الانعطاف وقوى القص, ذلك لأن الخطأ في تعيين ردود الأفعال سيؤدي حتماً إلى أخطاء في دراسة العزوم وقوى القص.

لندرس الآن عزوم الانعطاف وقوى القص في مقطع عرضي ما من الجائز وليكن المقطع I–I الواقع بين النقطتين A–C والذي يبعد بمقدار x_1 عن النقطة A. ولتكن النقطة 0 مركز ثقل المقطع العرضي المدروس.

لتعيين قوى القص ندرس الجزء الواقع إلى اليسار من المقطع المدروس وذلك نظراً لتعرضه لعدد أقل من القوى الخارجية, ولنعين قوة القص من شرط التوازن:

$$\sum Y = O \Rightarrow Q_1 = +R_A = \frac{P.b}{l}$$

ونلاحظ هنا أن قوة القص في المقطع 1–1 لا تتعلق ببعد المقطع عن المسند A،لذا فإن قيمة القص تبقى ثابتة في المجال الأول المحصور بين المسند A و نقطة تطبيق القوى الخارجية C.
يمثل تابع القص في المجال الأيسر مستقيماً نرمز له F_2, D_2وذلك بعد محور التراتيب المحور Q ومحور الفواصل محور الجائز ذاته.

بعد الانتهاء من رسم مخطط القص في الجزء الأيسر من الجائز ندرس قوى القص في الجزء الأيمن ولهذا الغرض نأخذ المقطع العرضي II–II ومن معادلة التوازن نجد:

$$Q_2 = -R_B = -\frac{P.a}{l}$$

ولقد اعتمدت إشارة السالب لقوة القص لأن قوة القص المطبقة إلى اليمين من المقطع المدروس تتجه نحو الأعلى.

ويمكننا أن نصل إلى النتيجة السابقة نفسها إذا درسنا الجزء الواقع إلى اليسار من المقطع:

$$Q_2 = R_A - P = -R_B$$

إن قيمة القص في المقطع II–II ثابتة في المجال الثاني والمحصور بين المسند B ونقطة تطبيق القوة الخارجية C.

نلاحظ أن قيمة القص في المقطع الواقع إلى اليسار قليلاً من نقطة تطبيق القوة المركزة تساوي:

$$Q = +\frac{Pb}{l}$$

وقيمة القص في المقطع الواقع إلى اليمين قليلاً من نقطة تطبيق القوى المركزة تساوي:

$$Q = -\frac{Pa}{l}$$

ونلاحظ أن مقدار الانقطاع في مخطط القص يساوي القوة المطبقة P.

إن الانقطاع المفاجئ في مخطط القص ناتج عن اعتبار أن القوة المركزة مطبقة في نقطة، بينما واقع الأمر أن القوة P تكون مطبقة على ساحة صغيرة وعندها فإن قيمة القص تنتقل من القيمة $+\frac{Pb}{l}$ إلى $-\frac{Pa}{l}$ بالتدريج وفق مستقيم مائل يمر من الصفر.

ننتقل لدراسة عزوم الانعطاف ونبدأ بعزوم الانعطاف في الجزء الأيسر من الجائز, ولنكتب قيمة عزم الانعطاف في المقطع I–I والتي تساوي مجموع عزوم القوى الواقعة إلى يسار أو يمين المقطع المدروس وذلك بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي المدروس:

$$M_1 = R_A x_1 = \frac{Pb}{l}.x_1$$

في هذا المثال نرى أن عزم الانعطاف تابع من الدرجة الأولى بالنسبة للمتحول x_1 ونلاحظ أن الصيغة السابقة صحيحة بالنسبة للمجال الأيسر AC فقط أي عندما

$$0 \le x_1 \le a$$

لتمثيل هذا التابع بيانياً نعد محور الفواصل منطبقاً على محور الجائز ومبدأ الاحداثيات منطبقاً على المقطع A وأن محور التراتيب والذي يمثل محور عزوم الانعطاف متجه نحو الأسفل.

ندرس عزوم الانعطاف في المجال الأيمن الواقع إلى اليمين من نقطة تطبيق القوة Pفنأخذ مجموع عزوم القوى الواقعة إلى اليمين أو إلى اليسار من المقطع II–II ولنعد القوى الواقعة إلى اليمين :

$$M_2 = R_B . x_2 = \frac{P.a}{l} x_2$$

إن قيمة عزم الانعطاف في المجال الأيمن هي موجبة أيضاً ذلك لأن القوة R_Bتؤثر في يمين المقطع المدروس في اتجاه يعاكس اتجاه عقارب الساعة.

نلاحظ أن عزم الانعطاف في المجال الثاني تابع من الدرجة الأولى بالنسبة للمتحول x_2 ويمثل هذا التابع بمستقيم يعين من نقطتين كما يلي:

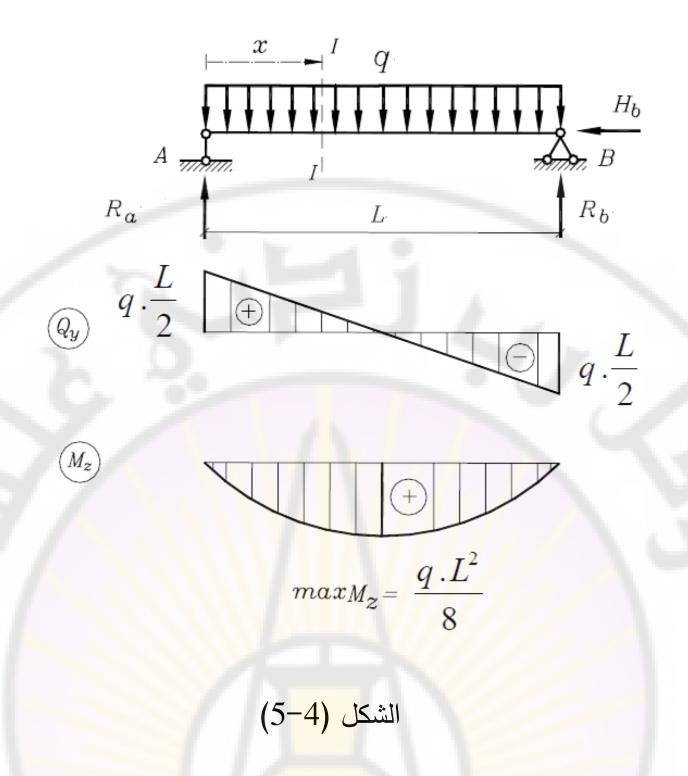
عندما: $x_2 = 0$ $\qquad M_2 = 0$

عندما: $x_2 = b$ $\qquad M_2 = \dfrac{P.a.b}{l}$

نرسم مخطط العزوم باعتبار القيم السابقة. الشكل (4–4) ومن هذا المخطط نلاحظ أن قيمة العزم الأعظمي في الجائز تساوي : $M_{max} = \dfrac{P.a.b}{l}$

مثال 4–2

يطلب رسم مخطط العزوم وقوى القص في الجائز المبين في الشكل (4–5) والمعرض لحمولة موزعة شدتها q وتكون وحدة هذه القوى (T/m أو Kgf/m...)



الشكل (4−5)

الحل :

نعين ردود الأفعال الشاقولية في A وB من شرط التوازن ومن تناظر الحمولة الخارجية:

$$R_A = R_B = \frac{q.l}{2}$$

نأخذ المقطع العرضي في O الواقعة على بعد x من المسند الأيسر.

لنرم الجزء الأيمن, ولندرس الجزء الأيسر المعرض لرد الفعل R_A وللحمولة الموزعة على المجال AO وللمزدوجة M ولقوة القص Q المطبقتين في المقطع O.

إن قوة القص Q تساوي الفرق بين رد الفعل R_A المتجه إلى الأعلى ومحصلة الحمولة الموزعة بانتظام والمتجهة نحو الأسفل أي:

$$Q = R_A - q.x = \frac{q.l}{2} - q.x \qquad 0 \le x \le l$$

إن قوة القص في الجائز المدروس تابع من الدرجة الأولى للمتحول x وأن التمثيل البياني لها (مخطط القص) هو مستقيم يعين بنقطتين:

عندما: $x=0$ $\qquad Q=\frac{q.l}{2}$

وعندما: $x=l$ $\qquad Q=-\frac{q.l}{2}$

يتعين عزم الانعطاف (في المقطع العرضي في O) بأخذ مجموع عزوم القوى الواقعة إلى يسار هذا المقطع. وهذه القوى هي رد الفعل في A وذراعه x, ومحصلة الحمولة الموزعة بانتظام والمطبقة إلى اليسار من المقطع المدروس وقيمتها $q.x$ وذراعها $\frac{x}{2}$. مما سبق نجد:

$$M=R_A.x-q.x.\frac{x}{2}=\frac{q.x}{2}(l-x) \qquad 0\le x\le l$$

ونلاحظ أن عزم الانعطاف في الجائز المعرض لحمولة موزعة بانتظام تابع من الدرجة الثانية بالنسبة للمتحول x , وأن مخطط العزم عبارة عن قطع مكافئ من الدرجة الثانية. وللرسم لا بد من تعيين عدد من نقاطه, ولنعين عزوم الانعطاف في أربع نقاط من الجائز:

$$x=0 \qquad \Rightarrow M=0$$

$$x=\frac{l}{4} \qquad \Rightarrow M=\frac{ql}{2.4}\left(l-\frac{l}{4}\right)=\frac{3ql^2}{32}$$

$$x=\frac{l}{2} \qquad \Rightarrow M=\frac{ql}{4}\left(l-\frac{l}{2}\right)=\frac{ql^2}{8}$$

$$x=l \qquad \Rightarrow M=0$$

لتعيين قيم العزم الأعظمي في الجائز لا بد أن نعين المقطع الذي تكون قيمة عزم الانعطاف أعظمية فيه, ولهذا نعين قيمة x_0 التي تعدم مشتق عزم الانعطاف:

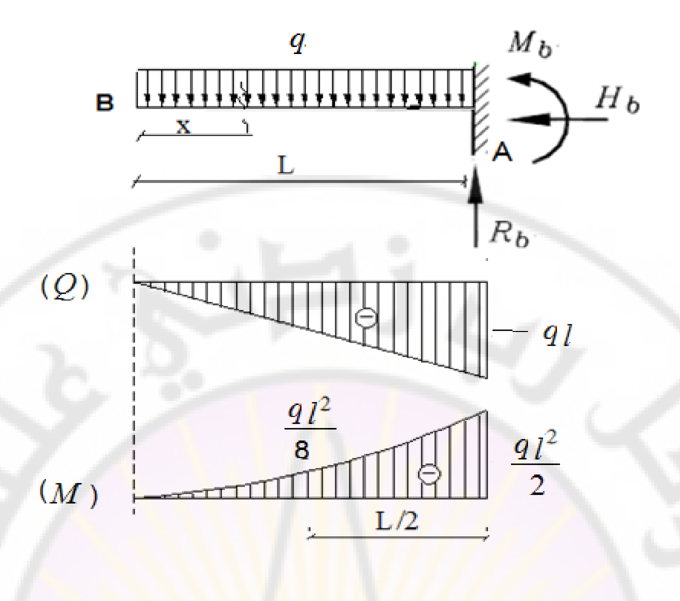
$$\frac{dM}{dx}=\frac{ql}{2}-2\frac{qx_0}{2}=0$$

$$x_0=\frac{l}{2}$$

$$M_{\max}=\frac{q\,x_0}{2}(l-x_0)=\frac{ql^2}{8}$$

مثال 4-3

يطلب رسم مخطط العزوم ومخطط قوى القص في الجائز الظفري الموثوق المبين في الشكل (4-6) المعرض لحمولة موزعة بانتظام.



الشكل (4-6)

الحل :

نعين قوى القص وعزوم الانعطاف دون تعيين ردود الأفعال, فنأخذ المقطع المار من النقطة O وندرس الجزء الواقع إلى اليسار من هذا المقطع فنجد:

$$Q = -qx \qquad M = -\frac{qx^2}{2} \qquad 0 \le x \le l$$

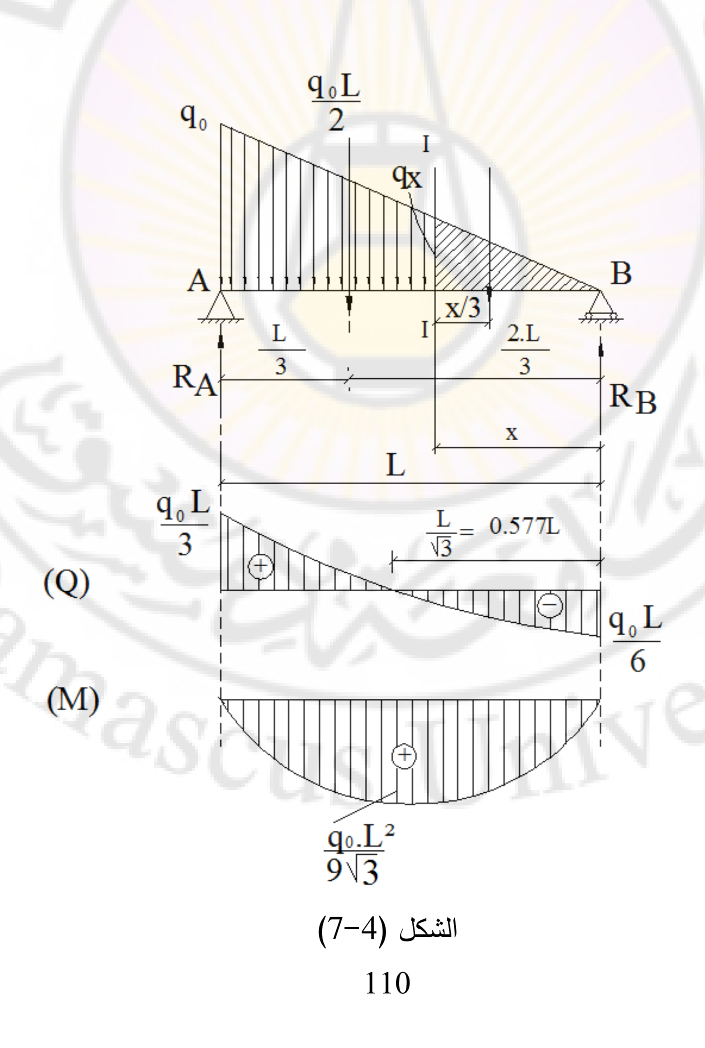
لرسم مخطط العزوم وقوى القص لا بد من تعيين قيم M و Q في عدد من المقاطع العرضية, وندرج نتائج الحساب في الجدول التالي:

x	Q (x)	M (x)
x = 0	$Q = 0$	M = 0
$x = \frac{l}{2}$	$Q = -\frac{ql^2}{2}$	$M = -\frac{ql^2}{8}$
$x = l$	$Q = -q$	$M = -\frac{ql^2}{2}$

يتضح من مخطط العزوم أن $M_{\min} = \frac{-ql^2}{2}$, وأن $Q_{\min} = -ql$. نلاحظ أن قيمة العزم الأعظمية بالقيمة المطلقة لا تنطبق على النهاية العظمى (التحليلية) لعزم الانعطاف في الجائز حيث $\frac{dM}{dx} = 0$, إلا أن هذه القيمة المعينة من المخطط ذات أهمية كبرى في دراسة مقاومة الجائز.

مثال 4-4

ارسم مخطط العزم ومخطط قوى القص في الجائز البسيط المبين في الشكل (4-7) والمعرض لحمولة موزعة بالشكل مثلثي .



الشكل (4-7)

الحل :

تتعرض الجدران الاستنادية إلى ضغط من التربة موزع بالشكل مثلثي , كما تتعرض جدران خزانات المياه وغيرها من المنشآت الأرضية لحمولات مشابهة . ونعين هذه الحمولات بالكثافة العظمى لها : $q_0\ (kgf/m)$

نعين ردود الأفعال من معادلات التوازن وواضح أن رد الفعل الأفقي يساوي الصفر $H_A = 0$

أما ردود الأفعال الشاقوليةفيتعين من مجموع العزوم بالنسبة للنقطة Aومن ثم بالنسبة للنقطة B ويمكننا عند تعيين ردود الأفعال أن نستبدل الحمولة الموزعة بالشكل مثلثي بحمولة مركزة مقدارها $W = q_0 \dfrac{L}{2}$ مطبقة في مركز ثقل المثلث :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A L - W\frac{2}{3}L = 0 \Rightarrow \quad R_A = \frac{2}{3}W = \frac{q_0 L}{3}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -R_B L + W\frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \quad R_B = \frac{1}{3}W = \frac{q_0 L}{6}$$

وهكذا فإن رد الفعل في المسند A يساوي ثلثي الحمولة الخارجية المطبقة وأن رد الفعل في المسند B يساوي ثلث الحمولة الخارجية المطبقة .

تأخذ المقطع $I - I$ والذي يبعد بالمقدار x عن المسند B , ولنعين أولاً شدة التحميل في هذا المقطع q (x) وذلك من تشابه المثلثات :

$$\frac{q(X)}{q_0} = \frac{x}{l}$$

$$q(X) = q_0 \frac{x}{l}$$

لتعيين Q و M في المقطع المدروس نرمي الجزء الواقع إلى اليسار من المقطع المدروس , ذلك لأن الجزء الأيمن معرض لحمولة مركزة ولحمولة موزعة بالشكل مثلثي , أما الجزء الواقع إلى اليسار فهو معرض لحمولة مركزة ولحمولة موزعة بالشكل سبه منحرف .

إن قوة القص في المقطع المدروس تساوي مجموع مساقط القوى الواقعة إلى يمين المقطع المدروس وهي رد الفعل R_B وهو ذو أشارة سالبة باعتباره متجهاً نحو الأعلى ويقع إلى ينين المقطع المدروس ومحصلة الحمولة الموزعة وهي موجبة وتساوي بالقيمة المطلقة مساحة الحمولة المثلثية المهشرة في الشكل (1−7) :

$$Q=-R_B+w(x)=-\frac{q_o l}{6}+\frac{1}{2}q_0\,\frac{x^2}{l}=-\frac{q_o l}{6}\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right)$$

وهكذا فإن قوة القص في الجائز هي تابع من الدرجة الثانية , ومخطط القص منحن مبين في الشكل , ولقد رسم باعنماد النقاط التالية :

$$x=0 \qquad Q=-\frac{q_0\, l}{6}=-R_B$$

$$x=l \qquad Q=+\frac{q_0\, l}{3}=-R_A$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad Q=-\frac{q_0\, l}{6}\left(1-\frac{3}{4}\right)=-\frac{q_0\, l}{24}$$

ومن مخطط القص نجد أن القيمة العظمى لقوة القص تكون في المسند A حيث :

$$Q_{\max}=+R_A=\frac{q_0\, l}{3}$$

ونعين المقطع العرضي الذي تنعدم فيه قوة القص :

$$Q=0=-\frac{q_0 l}{6}\left(1-\frac{3x_0^2}{l^2}\right) \quad ; \quad x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}=0,5771$$

ونستفيد من هذه النقطة في تعيين عزم الانعطاف الأعظمي في الجائز .

نتتقل لدراسة عزم الانعطاف في المقطع المدروس فنأخذ مجموع عزوم القوى الواقعة إلى يمين المقطع المدروس وهي رد الفعل R_B وذراعه X والحمولة الموزعة بالشكل مثلث ومحصلتها $w(x)=\frac{1}{2}q_0\,\frac{x^2}{l}$ وذراعها $\frac{x}{3}$

من الصيغة الأخيرة يتضح أن عزم الانعطاف في الجائز من الدرجة الثالثة بالنسبة للمتحول x ويرسم مخطط العزم بعد تعيين قيم العزوم في عدد من نقاط الجائز :

$$x=0 \;\Rightarrow \qquad M=0$$

$$x=\frac{l}{2} \;\Rightarrow \qquad M=\frac{ql^2}{12}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{q_0\, l^2}{16}$$

$$x=l \;\Rightarrow \qquad M=0$$

نعين قيمة عزم الانعطاف الأعظمي في الجائز وذلك من الصيغة العامة لعزم الانعطاف وباعتبار :

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

أي في النقطة التي ينعدم فيها القص :

$$M_{\max} = \frac{q_0\, l^2}{6 l^2 \sqrt{3}} \left(l^2 - \frac{l^2}{3} \right) = \frac{q_0\, l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{q_0\, l^2}{15{,}58}$$

نلاحظ أن قيمة عزم الانعطاف الأعظمي قريبة من قيمة عزم الانعطاف في منتصف الجائز $\frac{q\,l^2}{16}$, كما يمكننا في الحياة العملية اعتماد عزم الانعطاف في منتصف الجائز بدلاً من العزم عند تصميم الجوائز البسيطة والمعرضة لحمولات مثلثية مطبقة على كامل الفتحة

4-4 العلاقة بين عزم الانعطاف وقوة القص وشدة التحميل q :

لنفرض أن لدينا جائزاً مثبتاً بصورة ما ومحملاً في الحالة العامة بقوة موزعة شدتها $q = f(x)$, ولنفرض أن اتجاه q موجب الشكل (4-8).

نقتطع من الجائز عنصراً dx, ويمكننا اعتبار الحمولة المطبقة على هذا العنصر الصغير موزعة بانتظام لصغر طوله نسبياً, نعوض عن القسم الأيسر المحذوف بالعزم M وبقوة القص Q التي نعتبرها موجبة, وكذلك نعوض عن القسم المحذوف الأيمن بالعزم $M + dM$ وقوة القص $Q + dQ$ ذلك لأن العزم وجهد القص في المقطع الأيمن يختلف عنه في الأيسر بمقدار تفاضلي.

إن اتجاه $M + dM$, $Q + dQ$ هو عكس اتجاه M , Qكما هو مبين في الشكل, ذلك لأن $M + dM$, $Q + dQ$, يعوضان الجزء الأيمن.

إن جميع القوى المؤثرة على العناصر dx يجب أن تكون في حالة توازن, لذا فإن مجموع مساقط جميع القوى المؤثرة على العنصر على الشاقول يساوي الصفر وكذلك مجموع العزوم بالنسبة للمقطع العرضي ab الشكل (1-9)

فينتج:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad Q - qdx - (Q + dQ) = 0$$

ومنه:

$$dQ = -qdx$$

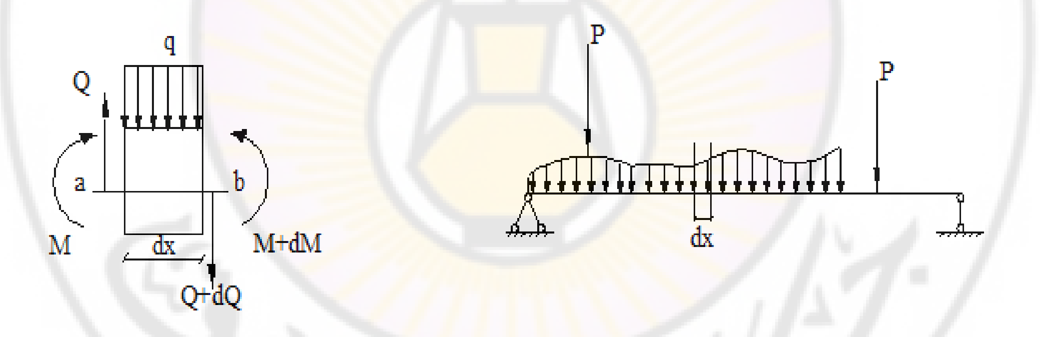
$$\sum M_b = 0 \Rightarrow \quad M + Qdx - qdx\ dx/2 - M - dM = 0$$

$$dM = Qdx - \frac{d^2x}{2}$$

وبتبسيط هاتين المعادلتين وإهمال الحدود اغير المتناهية في الصغر من الدرجة الثانية ($\frac{q}{2}dx^2$) ينتج :

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \qquad (1-4)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad (2-4)$$



الشكل (4-9) الشكل (4-8)

وهكذا نستنتج أن مشتق قوة القص يساوي كثافة الحمولة الموزعة مع إشارة معاكسة، وأن مشتق عزم الانعطاف يساوي قوة القص.

ومن العلاقات السابقة يمكننا أن نؤكد بعض النتائج المهمة عن الشكل مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاصة في الجائز المستقيم.

إذا كان الجائز محملاً بقوة موزعة بانتظام شدتها ثابتة على كامل الجائز فإن معادلة جهد القص تمثل تابعاً من الدرجة الأولى ويمثل مخطط Q مستقيماً مائلاً, أما معادلة العزم M فتمثل تابعاً من الدرجة الثانية ويأخذ مخطط M الشكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية.
إذا كان الجائز محملاً بقوة موزعة بالشكل مثلث, أي أن التابع q(x) من الدرجة الأولى, فإن التابع Q يكون من الدرجة الثانية ويكون لهذا التابع نهاية عظمى في النقاط التي تنعدم فيها الحمولة أي q(x)=O, أما التابع M فيكون من الدرجة الثالثة وتكون له نهاية عظمى عندما ينعدم جهد القص أي $Q(x) = 0$.
إذا كان الجائز محملاً بقوى أو عزوم مركزة فإن مخطط قوة القص بين هذه القوة يمثل مستقيماً موازياً للمحور x, ومخطط العزم يمثل مستقيماً مائلاً .

5-4 الإجهادات الناظمية في حالة الانعطاف الصافي :

ننطلق في دراستنا للإجهادات الحادثة في الجوائز المعرضة للانعطاف من الاعتبارات التالية :
1- محور الجائز أي الخط المار من مراكز الثقل لجميع المقاطع العرضية للجائز يكون مستقيماً قبل تحميل الجائز.
2- جميع القوى الخارجية المؤثرة على الجائز تقع في مستو واحد يمر من محور الجائز.
3- المقاطع العرضية للجائز متناظرة بالنسبة لمستوى القوى الخارجية وقلنا في البحث السابق أنه نتيجة للتحميل بهذا الشكل تحدث في المقاطع العرضية عزوم انعطاف وقوى قص .
نبتدئ بدراسة الإجهادات الناتجة عن عزوم الانعطاف لذا فإننا ندرس أجزاء الجائز التي تتعرض لعزم انعطاف فقط

وتدعى هذه الحالة بالانعطاف الصافي. وفي هذه الحالة يكون العزم ثابتاً في هذا الجزء بينما تنعدم قوى القص. الشكل (4-11).

تحت تأثير الحمولات ينعطف الجائز وتتعرض الألياف العليا إلى التقلص والدنيا إلى التمدد وعند الانتقال من الليف الأعلى إلى الليف الأدنى نلتقي بطبقة لا تتعرض أليافها لا للتقلص ولا

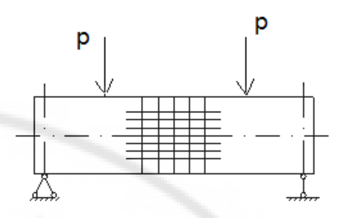
للتمدد. هذه المنطقة ندعوها بالمنطقة المحايدة. إن خط تقاطع هذه المنطقة المحايدة مع المقطع العرضي يدعى (المحور السليم).

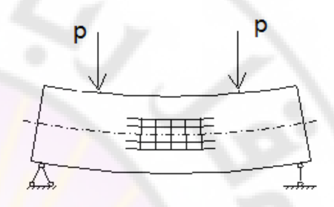
لنقطع عنصراً ds في منطقة الانعطاف ولنرسم هذا العنصر على حدة الشكل (4−10) , إن أطراف العنصر كانت متوازية قبل التشوه.
ينحرف هذان الطرفان قليلاً بعد التشوه وبالشكلان بينهما زاوية صغيرة.
ومن الضروري هنا أن نؤكد أن المقاطع المستوية قبل التحميل تبقى مستوية بعد التحميل أيضاً وقد أكدت التجارب هذه الفرضية.
لنفرض أن الليف mn واقع في المنطقة المحايدة وليكن ρ نصف قطر الانحناء لمحور الجائز الشكل (4−12) نرى أن الطول mn لا يتغير ويبقى دائماً مساوياً إلى ds.

$$ds = mn = \rho\, d\,\alpha$$

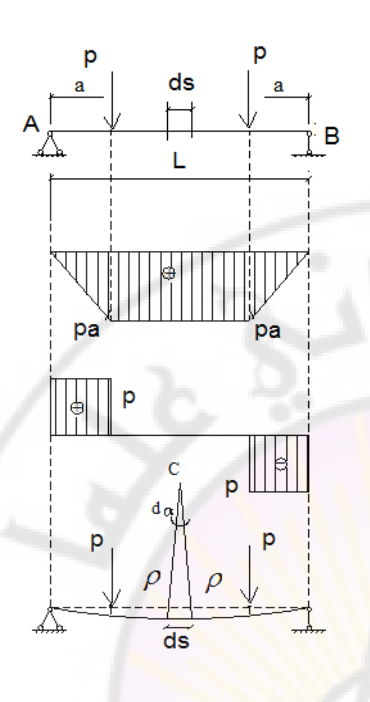
إن الألياف الأخرى الواقعة فوق أو تحت هذا الليف تتعرض لتغير في طولها. لنأخذ مثلاً الليف $m'n'$ الواقع في منطقة الشد على مسافة y من المحور السليم عند حدوث التشوه في الليف $m'n'$، يتمدد من أجل أن نحدد تمدد هذا الليف نأخذ من النقطة n موازياً لـ mm' حتى يتقاطع مع الليف ($m'n'$) في النقطة n'' بحيث $m'n'' \approx mn$ وهكذا: فالقطعة $n''n'$ هي التمدد الكامل لليف $m'n''$:

$$n'n'' = y\, d\,\alpha$$





الشكل (4−10)



الشكل (4−11)

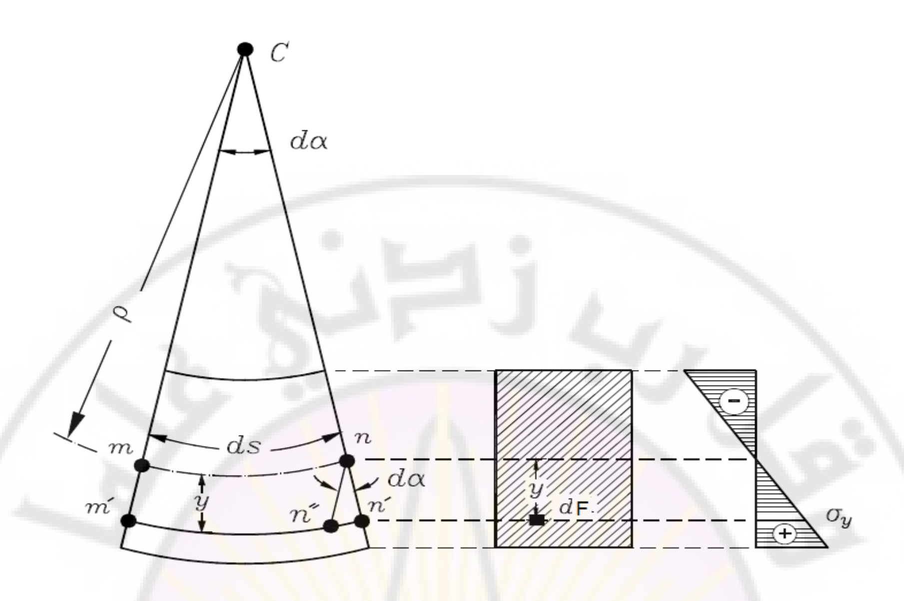
ويكون التمدد الطولي (النسبي) :

$$\varepsilon_{(y)} = \frac{n'n''}{mn} = \frac{y d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho} \qquad (3-4)$$

وباعتماد قانون هوك $\sigma = E\,.\,\varepsilon$

نرمز للإجهاد الناظمي في الليف المدروس σ_y:

$$\sigma_{(y)} = E.\varepsilon_{(y)} = \frac{E.y}{\rho} \qquad (4-4)$$



الشكل (4−12)

بفرض dF سطحاً عنصرياً صغيراً يقع على بعد y من المحور السليم .

إن القوة الشادة المطبقة على هذا السطح:

$$\sigma_y dF = \frac{Ey}{\rho} dF$$

لنحذف القسم الأيمن من الجائز ونبق على القسم الأيسر من المقطع المعتبر الشكل (4−13).

لنعوض عن القسم المحذوف بقوى وهي هنا M فقط لكون المقطع يقع في مجال العزم الصافي .

إن شرطي التوازن هما:

$$\sum X = 0 \quad , \quad \sum M = 0$$

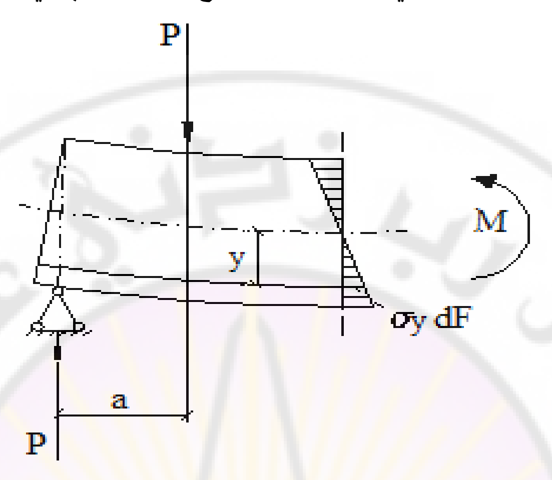
الشرط الأول :

$$\sum X = \int \sigma_y dF = \frac{E}{\rho} \int y dF = 0$$

وبما أن $E \neq 0$, $\rho \neq \infty$ لذلك من الضروري أن يكون:

$$\int_F y dF = 0$$

وهذا يعني أن العزم الستاتيكي للمقطع العرضي بالنسبة للمحور السليم يجب أن يساوي الصفر, وبالتالي فالمنطقة المحايدة تمر في مراكز ثقل المقاطع العرضية أي في محور الجائز.



الشكل (4- 13)

الشرط الثاني :

إن العزم الجزئي dM للقوة المطبقة على السطح dF بالنسبة للمحور المحايد

$$dM = \sigma_y . dF . y$$

و لكامل المقطع العرضي فإن :

$$\int_F y \sigma_y \, dF = M$$

$$E / \rho \int y^2 dF = M \qquad (5-4)$$

$$\frac{E}{\rho} I = M$$

ومنه: $(6-4)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

إن $\left[\frac{1}{\rho} \right]$ هو انحناء محور الجائز و EI قساوة الجائز على الانعطاف.

لنعد إلى القانون الذي يعبر عن الإجهادات في الليف الواقع على بعد y من المحور السليم .

$$\sigma_y = \frac{Ey}{\rho}$$

لنعوض عن $\frac{1}{\rho}$ بالقيمة المساوية من الدستور $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

$$\sigma_y = \frac{M}{I} y \qquad (7-4)$$

من هذه الصيغة نرى ان الإجهاد الناظمي الأعظمي هو في الليف الأبعد عن المحور السليم, فإذا كانت مسافة أبعد الألياف من الأعلى والأسفل عن المحور السليم هي h_1 و h_2 تكون الإجهادات في هذه الألياف إلى الشكل (4−14):

$$\sigma_1 = \frac{M}{1} h_2 \qquad \sigma_2 = \frac{M}{1} h_1 \qquad (8-4)$$

ومن أجل المواد التي تعمل تقريباً بصورة واحدة على الشد والضغط كالحديد مثلاً وعندما :

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

تأخذ الصيغة (4−8) الشكل التالي :

$$\sigma = \frac{M}{I} \frac{h}{2}$$

لنعبر بـ W عن القيمة :

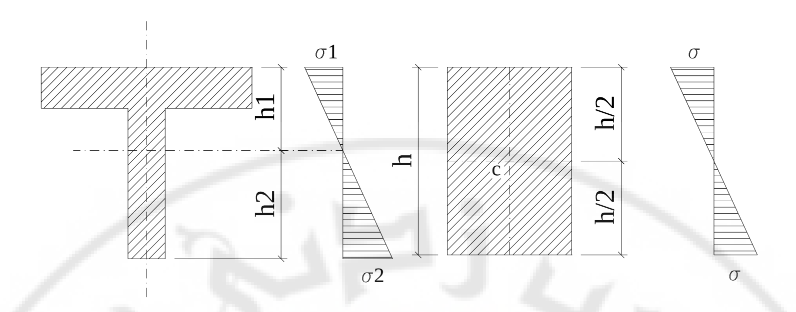
$$W = \frac{I}{h/2}$$

إن W تدعى عزم المقاومة للمقطع عند ذلك:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \qquad (9-4)$$

وبالنسبة للمقطع المستطيل يكون لدينا:

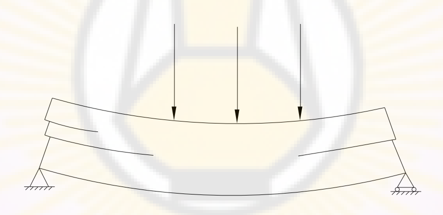
$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$



الشكل (4–14)

4–6- الإجهادات المماسية في حالة الانعطاف:

تؤدي الإجهادات المماسية في العناصر المعرضة للانعطاف والمنفذة من مادة لا تقاوم القص بالشكل جيد كالخشب – إلى شقوق طولية (4–15). كما أنه من الضروري تعيين هذه الإجهادات في جميع الجوائز المعرضة للانعطاف ومقارنتها بالإجهادات المسموح بها.



الشكل (4–15)

لدراسة الإجهادات المماسية في الجائز الموضح بالشكل (4–16) نقطع عنصراً من الجائز ضمن مقطعين عرضيين متوازيين وليكن عرض هذا العنصر dx. ولنأخذ المقطع bc الموازي للمحور السليم.

لنرسم العنصر abcd بصورة مستقلة مكبرة ولنفتش عن شروط توازن هذا العنصر.

إن العزم في المقطع على بعد x من المسند الأيسر هو M, والعزم في المقطع على بعد x + dx هو M1 : $M_1 > M$

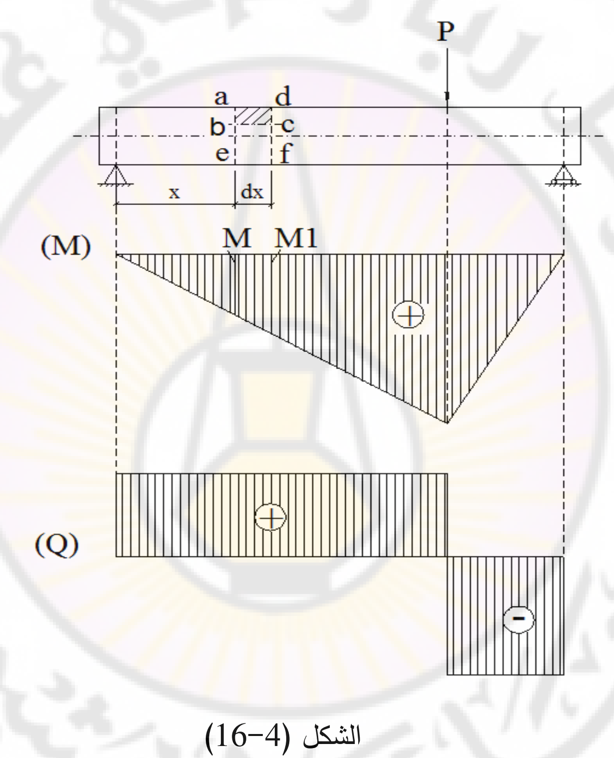
إن تزايد العزم بين المقطعين هو: $dM = M_1 - M$

الإجهاد الناظمي في المقطع على بعد x هو: $\sigma = \frac{M}{I} y$

وفي المقطع على بعد x + dx هو $\sigma_1 = \frac{M_1}{I} y$

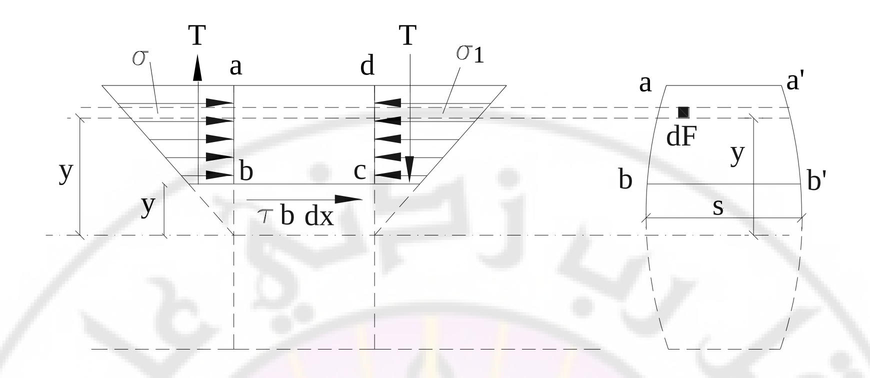
لنعد السطح dF في المقطع على بعد x الشكل (4−17) حيث القوى المؤثرة عليه هي:

$$\sigma\, dF = \frac{M}{I} y dF$$



الشكل (4−16)

هذه القوة ضاغطة على العنصر abcd لأن العنصر واقع في منطقة الضغط.



الشكل (4−17)

إن مجموع هذه القوى المؤثرة بالسطح $abb'a'$ هي:

$$N = \int \sigma.dF = \frac{M}{I}\int y.dF = \frac{M}{I}S$$

حيث S العزم الستاتيكي للسطح $abb'a'$ بالنسبة للمحور السليم. وبالطريقة ذاتها نجد أن القوة الضاغطة على الطرف الأيمن للعنصر هي:

$$N_1 = \int \sigma_1.dF = \frac{M_1}{I}\int y\,dF = \frac{M_1}{I}.S$$

لنعوض عن القسم المحذوف من الجائز الواقع إلى الأسفل من المقطع bc بقوة القص في هذا المقطع وبهذا نكون قد اعتبرنا أن الألياف لا تضغط على بعضها بعضاً, وهذا صحيح عندما يكون عنصر بعيد عن مكان تمركز القوة.

وفي المقطع bc من العنصر يكون لدينا إجهاد القص τ موزعاً بانتظام على عرض الجائز b عند مستوي المقطع bc . إن قوة القص الكاملة هي $\tau.b.dx$, ويكون توجيهها باتجاه العزم الأكبر M_1 , وذلك من شرط التوازن $\sum X = 0$ أي :

$$N - N_1 + \tau\, bdx = 0$$

$$\frac{M}{I}S - \frac{M_1}{I}S + \tau\, bdx = 0 \Rightarrow \tau\, bdx - (M_1 - M)\frac{S}{I} \Rightarrow$$

$$\tau\, b.dx = dM\,\frac{S}{I} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{dM}{dx}\frac{S}{I.b}$$

ولكن : $\frac{dM}{dx} = Q$

وبالتالي:

$$\tau = \frac{Q.S}{I.b} \qquad (10-4)$$

حيث:

τ : إجهاد القص في مستو موازٍ للمستوى المحايد ويبعد عنه بالمقدار ý .

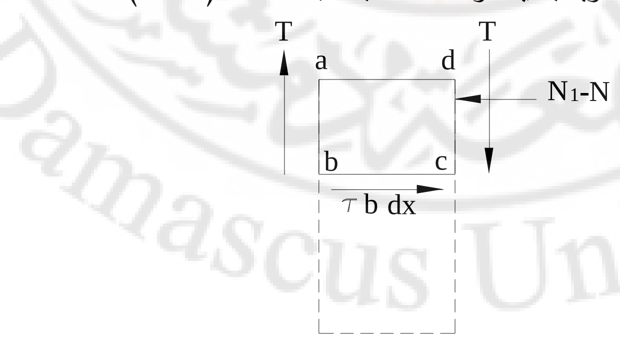
Q : جهد القص في المقطع المدروس.

S : العزم الستاتيكي بالنسبة للمحور السليم لجزء المقطع العرضي الواقع فوق السطح حيث يحدد إجهاد القص.

b : عرض المقطع.

I : عزم عطالة كامل المقطع بالنسبة للمحور السليم

من الواضح أن القوى $(N - N_1)$ و $\tau\, bdx$ تالشكل مزدوجة تدور العنصر abcd بعكس اتجاه عقارب الساعة, لذلك ولكي يكون العنصر متوازناً يجب أن يكون هناك بالأطراف الشاقولية للعنصر abcd قوى تماس متساوية بالقيمة و متعاكسة بالاتجاه الشكل (4-18)



الشكل (4-18)

إن تغيير إجهاد القص في مقطع يمكن أن يوضح على المخطط الذي ندعوه مخطط إجهاد القص أو مخطط الإجهادات المماسية ، ولنبحث الآن توزع الإجهادات لبعض أشكال المقاطع العرضية.

4-7 توزع الإجهادات المماسية لمقطع مستطيل :

نعين العزم الستاتيكي للمقطع المهشر بالنسبة للمحور xالشكل (4-19)

$$S = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left(\frac{h}{2} + y\right) / 2$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{b}{8}\left(h^2 - 4y^2\right)$$

$$\tau = \frac{QS}{bI} = \frac{Q}{bI}\left(h^2 - 4y\right)\frac{b}{8}$$

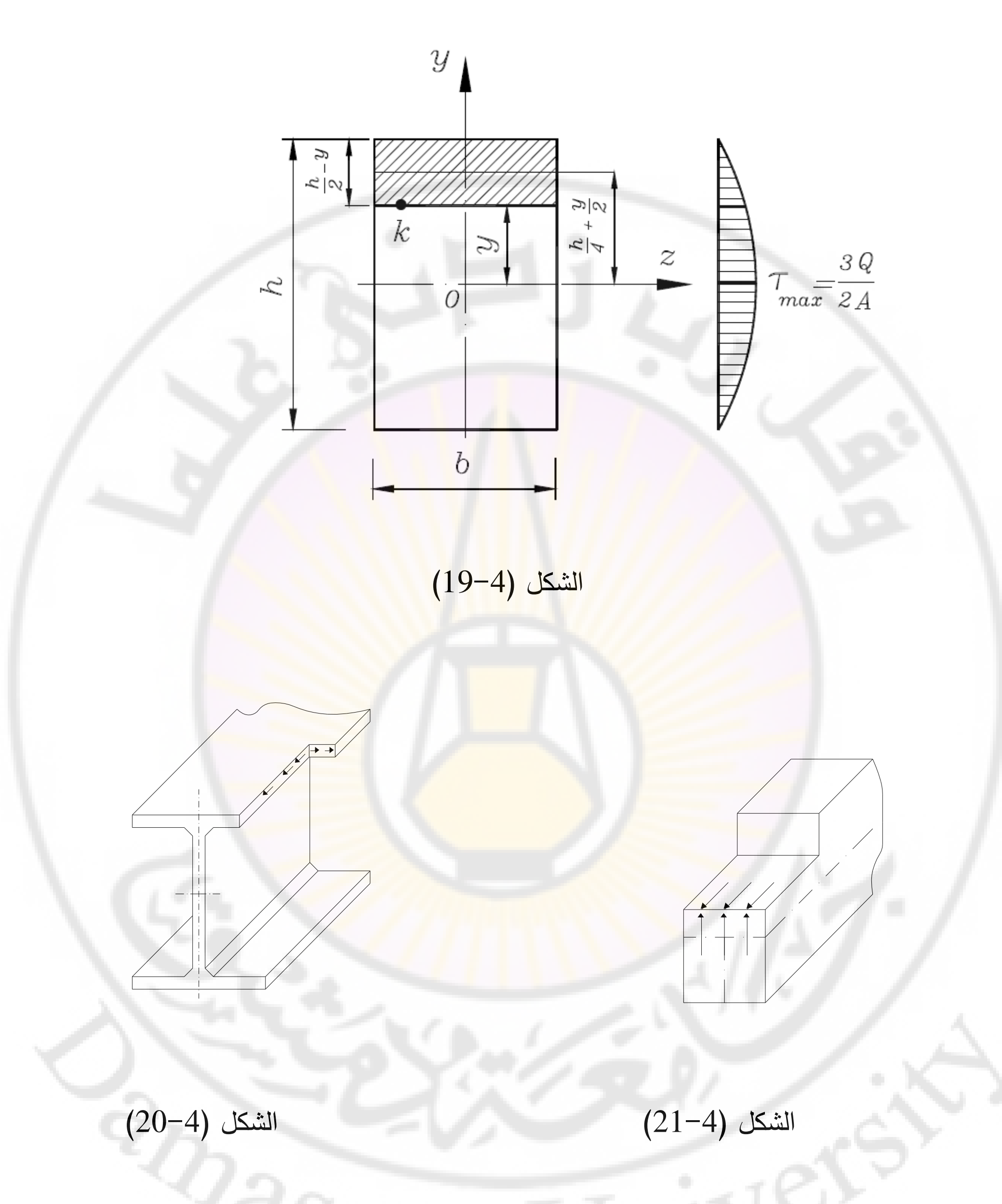
ويكون الإجهاد الأعظمي عندما $y = 0$ أي في المستوى المحايد:

$$\frac{Qh^2}{8I} = \frac{Qh^2}{8I} = \frac{Qh^2}{8h^3} \cdot \frac{12}{b} = \frac{3Q}{2bh}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A} \qquad (11-4)$$

أي أن الإجهادات المماسية في المقطع العرضي المستطيل تكون أعظمية في الساحات المحايدة حيث الإجهادات الناظمية تساوي الصفر، وتتناقص هذه الإجهادات كلما انتقلنا إلى طرف المقطع العرضي حيث تتناهى إلى الصفر في الألياف العليا والألياف السفلى (الشكل 4-19).
ونرى في الشكل ذاته الإجهادات المماسية في الساحات الشاقولية وفي الساحات الأفقية في نقطة تبعد عن المحور بمقدار y ولقد أخذت هذه الإجهادات المماسية باعتبار قيم M , Q في المقطع المدروس موجبة.

ويأخذ مخطط الإجهادات المماسية في المقاطع العرضية بالشكل I الشكل قطع مكافئ مع انقطاع في نقطة التغير المفاجئ في المقطع العرضي. الشكل (4-20).(4-21)



الشكل (4−19)

الشكل (4−20)

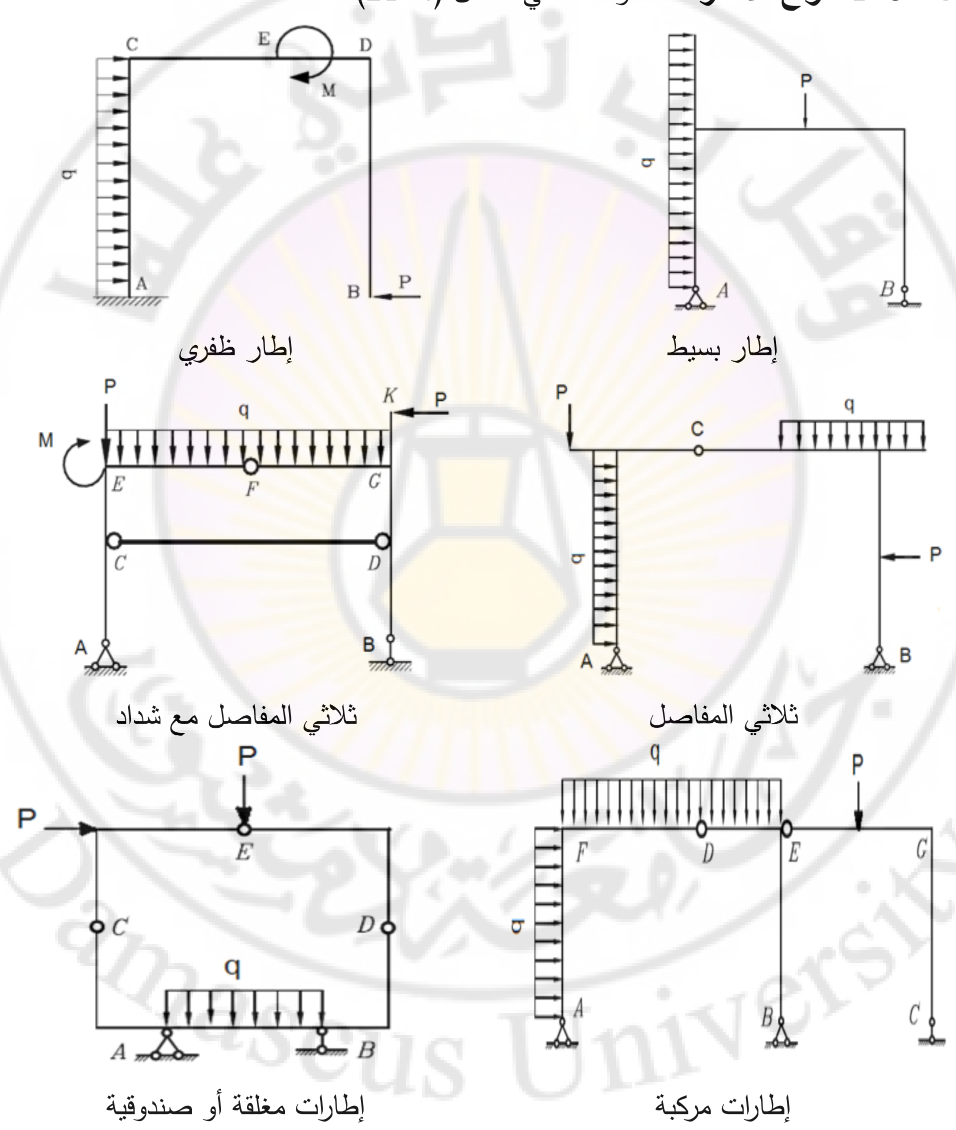
الشكل (4−21)

وتكون الإجهادات المماسية في أجنحة المقطع صغيرة جداً ويمتص جسد المقطع العرضي معظم قوة القص المؤثرة (ما يقرب من % 95) إلا أن أجنحة المقطع تتعرض إلى إجهادات مماسية أفقية توازي المقطع العرضي (والإجهادات الماسية العمودية عليها توازي مستوي التناظر)

4-8 الإطـــارات :

الإطارات المستوية هي منشآت صلبة غير قابلة للانزياح مؤلفة من عناصر خطية (مستقيمة أومنحنية) متصلة فيما بينها اتصالاً مفصلياً بواسطة مسامير الوصل أو اتصالاً صلداً

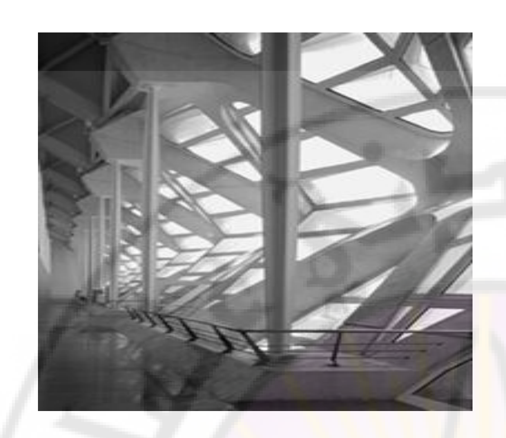
4-8-1 أنواع الاطارات : موضحة في الشكل (4-21)



الشكل (4-21)

أمثلة توضيحية لإطارات مختلفة









الشكل (4-21)

4—8-2 القوى الداخلية التي يتعرض لها الإطار واصطلاح الإشارات :

يتعرض الإطار إلى القوى التالية :

1- القوى الناظمية N

2- القوى القاصة Q

3- عزم الانعطاف M

اصطلاح الإشارات المتبعة في الإطارات هي نفس الإشارات المتبعة في الجوائز

تظهر أهمية تحديد جانب الشد في عزم الانعطاف عند تصميم المنشآت الخرسانية إذ يحدد هذا الجانب موضع قضبان التسليح الرئيسية .

4—8—3 دراسة القوى الداخلية في الإطارات (طريقة التجزئة):

يقسم الإطار عند نقاط الانكسار إلى مجموعة من الجوائز التي تتم دراستها بدءاً من يسار الإطار أو اليمين ويعتبر كل من هذه الجوائز جائزاً ظفرياً موثوق من أحد طرفيه وحراً من الطرف الآخر وذلك بعد حذف الجزء الواقع على امتداد الطرف الحر وتتم دراسة هذا الجائز تحت تأثير القوى التالية :

1- القوى الخارجية المطبقة مباشرة على الجائز المدروس

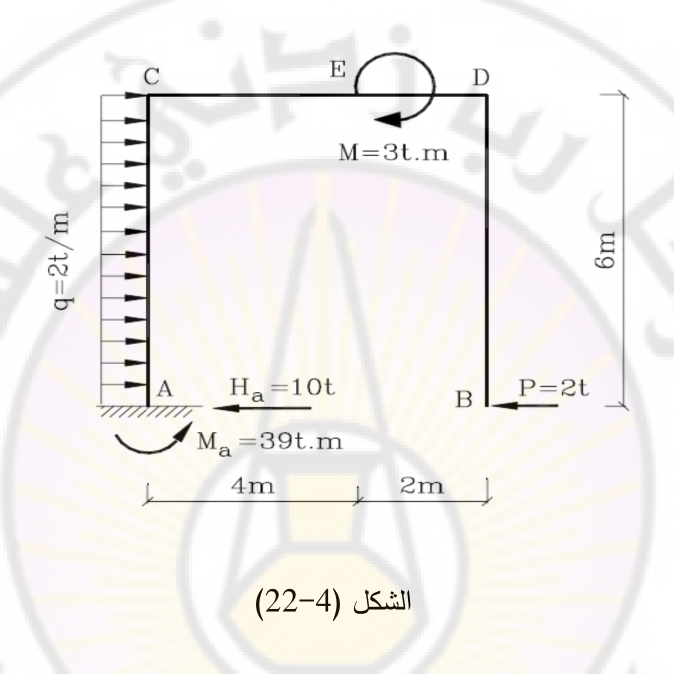
2- القوى المنقولة إلى الجائز المدروس من جزء الإطار الذي تم حذفه (القوى الناظمية ، القوى القاصة ، عزم الإنعطاف)

4-8-3 رسم المخططات :

- ترسم القوى الناظمية إلى داخل الإطار أو خارجه (ويعتمد هذا الاصطلاح لكامل الإطار)
- يرسم القص الموجب إلى خارج الإطار والسالب إلى داخل الإطار ، ويمكن أن تعتمد طريقة النقطة المتحركة في رسم مخطط القص . كما يمكن أن نتحقق من إشارات القص من إشارات القص بعد فرد الإطار.
- يرسم مخطط العزوم على جهة الألياف المشدودة (لكامل الإطار) وتعتمد قواعد الإشارة نفسها في الجوائز وذلك بعد أن نفرد محور الإطار ونجعله مستقيماً آخذين المسند الأيسر بداية للجائز الجديد .
- بعد الانتهاء من دراسة القوى الداخلية لجميع أجزاء الإطار والانتهاء من رسم مخططات العزوم والقوى الناظمية وقوى القص ، يمكننا التحقق من صحة هذه المخططات بالتأكد من توازن العقد ونعتبر تقاطع اثنين أو أكثر من عناصر الإطار عقدة

مثال 4-5

يطلب تعيين ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية (عزوم الانعطاف وقوى القص والقوى الناظمية) للإطار المبين بالشكل (4-22)



الشكل (4-22)

الحل :

يمكن دراسة هذا الإطار بتقسيمه إلى ثلاثة جوائز هي AC,CD,DB حيث تتم دراسة كلٍ منها بدءاً من الجائز الأيمن في الإطار (DB) وانهاءاً بالجائز الأيسر (AC) ، وعندئذ لاحاجة لتعيين ردود الأفعال في المسند A قبل البدء بدراسة القوى الداخلية ، حيث إن هذه الدراسة تتم بدءاً من الطرف الحر

دراسة الجائز DB :

تتم دراسة هذا الجائز باعتباره جائزاً ظفرياً موثوقاً من الطرف D وحراً من الطرف B وذلك تحت تأثير الحمولة الخارجية P=2 t المطبقة في المقطع B منه الشكل (4-23-a) ، فإذا اعتبرنا محور الأحداثيات واقعاً عند الطرف الحر B يكون :

في المجالBD ، حيث : $0 \le x \le 6m$

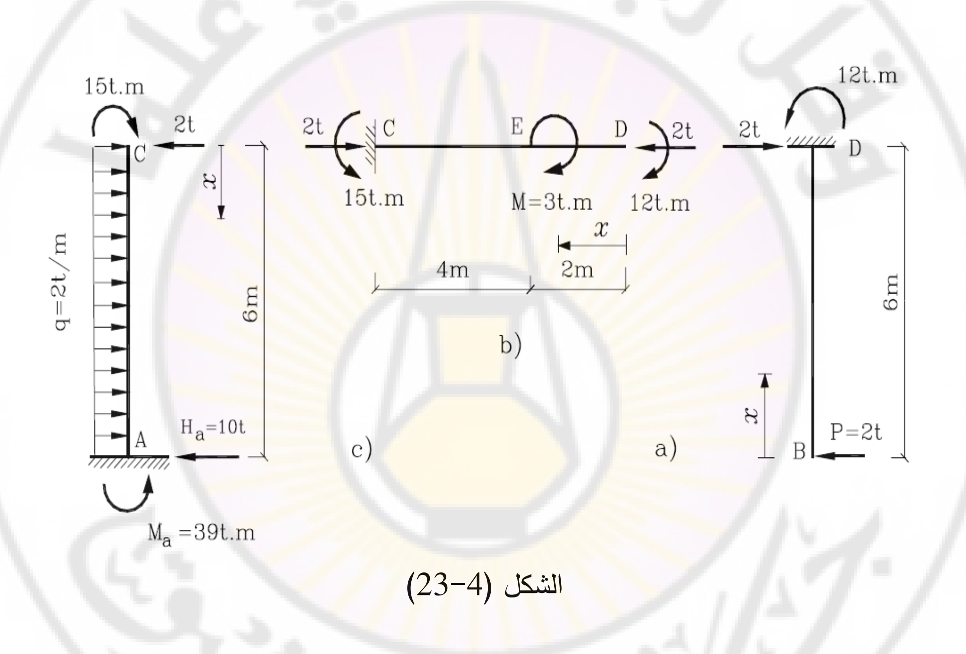
$N = 0$

$Q = P = 2\,t$

$M = -P.x = -2x$

$x = 0 \Rightarrow M = 0$

$x = 6\,m \Rightarrow M = -12\,t.m$



الشكل (4−23)

دراسة الجائز CD :

تتم دراسة هذا الجائز باعتباره جائزاً ظفرياً موثوقاً من الطرف C وحراً من الطرف D وذلك تحت تأثير الحمولة الخارجية M=3 t.m المطبقة في المقطع E منه إضافة إلى الحمولات المنقولة إليه من الجائزDB كما في الشكل (4−23−a) .

فإذا افترضنا محور الأحداثياتx موازياً لمحور الجائز CD ومبدأ الإحداثيات واقعاً عند الطرف الحر D نحصل على :

في المجالDE ، حيث : $0 \le x \le 2m$

$N = -2\,t \quad ; \quad Q = 0 \quad M = -12\,t.m$

في المجال CE ، حيث : $0 \le x \le 6m$

$$N = -2\,t \quad ; \quad Q = 0 \quad M = -15\,t.m$$

دراسة الجائز AC :

تتم دراسة هذا الجائز الظفري الموثوق من الطرف A وذلك تحت تأثير الحمولة الخارجية الموزعة بانتظام q =2 t/m على طول المجال AC إضافة إلى الحمولات المنقولة إليه من الجائز CD كما في الشكل (4−23−C) .

فإذا افترضنا محور الأحداثياتx موازياً لمحور الجائز AC ومبدأ الإحداثيات واقعاً عند الطرف الحر C نحصل على :

$$N = 0$$

$$Q = q.x - 2 = 2.x - 2$$

$$x = o \quad \Rightarrow \quad Q = -2t$$

$$x = 6 \quad \Rightarrow \quad Q = 10t = H_a$$

وتنعدم قوة القص في المقطع الواقع على مسافة x_o من الطرف الحر C، حيث

$$x_o = \frac{Q_c}{q} = \frac{2}{2} = 1\,m$$

$$M = -q.\frac{x^2}{2} + 2.x - 15 = -x^2 + 2x - 15$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -15\,t.m$$

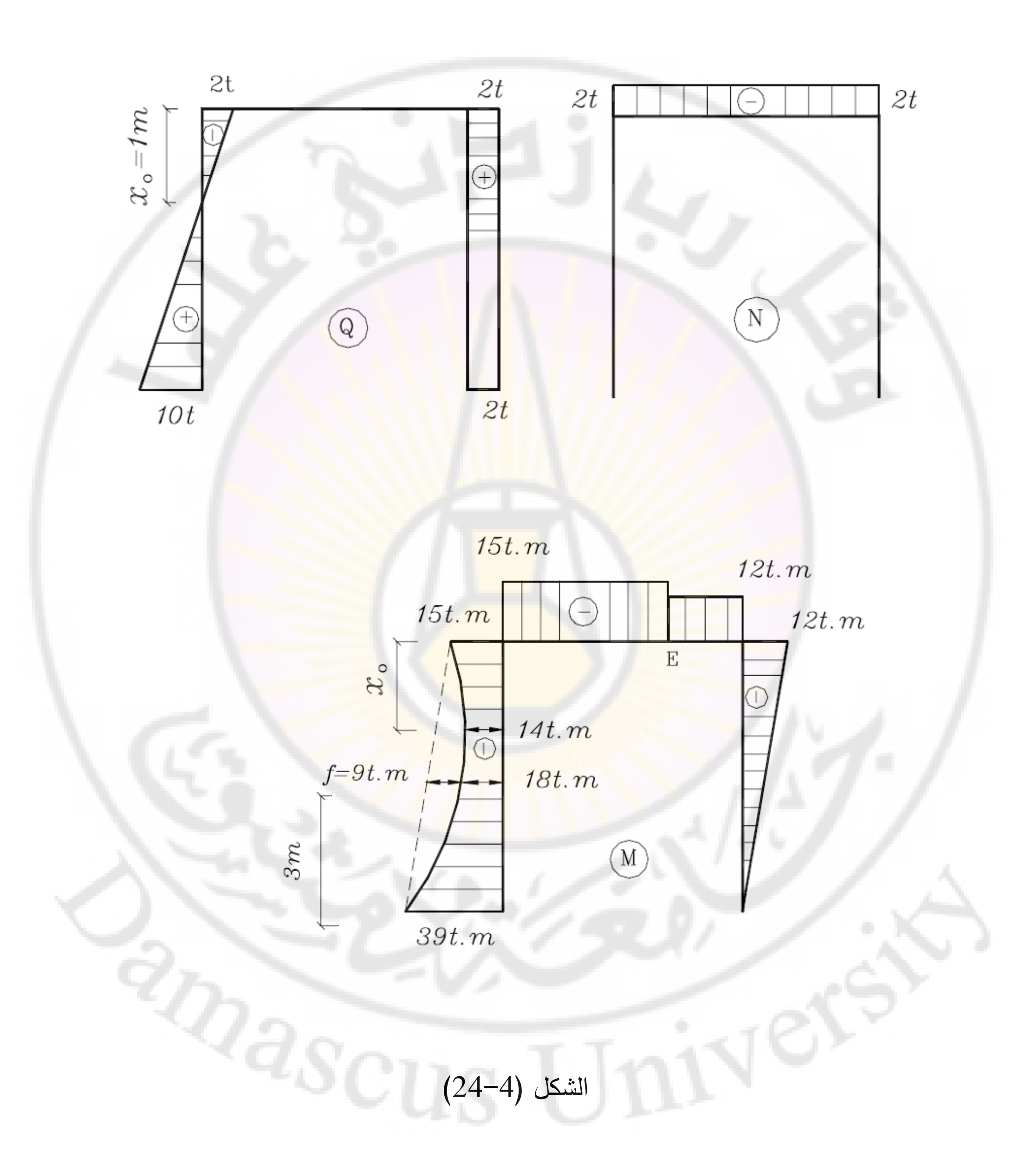
$$x = 6\,m \quad \Rightarrow \quad M = -39\,t.m$$

$$x = 3\,m \quad \Rightarrow \quad M = -18\,t.m$$

أما عزم الانعطاف الأعظمي(بالقيمة الجبرية) في هذا المجال ، فإنه يؤثر في المقطع الذي تنعدم في قوة القص ولذا فإن قيمته تساوي إلى :

$$\max M_{X0} = -x_0^2 + 2x_0 - 15 = -1 + 2.1 - 15 = -14t.m$$

ويبين الشكل (4–24) مخططات القوى الناظمية وقوى القص وعزوم الانعطاف في الجائز المدروس .



الشكل (4–24)

الفصل الخامس

الخط المرن لعنصر مستقيم

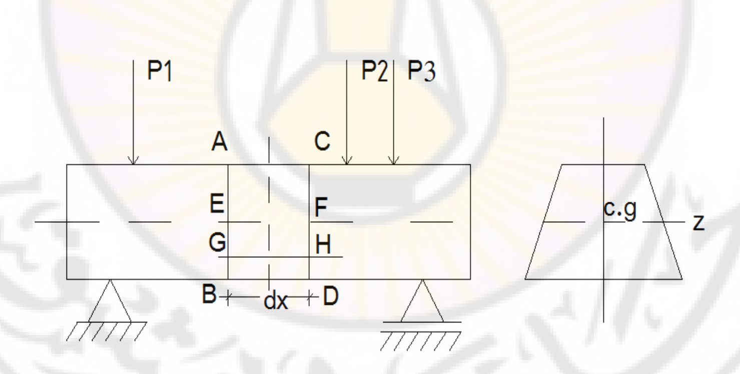
5-1 المعادلة التفاضلية للخط المرن

يأخذ محور العنصر بعد تعرضه للحمولات الخارجية منحى يدعى بالخط المرن, وتكون دراسة انحنائه (الخط المرن) ضرورية في حالتين :

1- عندما تقضي الاعتبارات الإنشائية ضرورة تحديد قيمة الانحناء الناتج عن الحمولات الخارجية (مقدار انحناء الخط المرن في نقطة منه يدعى بالسهم)

2- عند إجراء تجارب وأبحاث على الجمل غير المقررة ستاتيكياً .

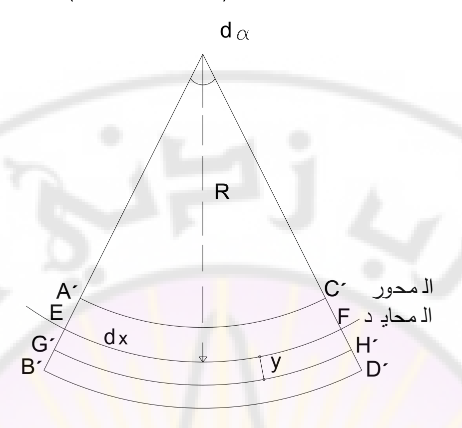
لتحديد الخط المرن يجب وضع معادلته التفاضلية أولاً, لندرس الجائز الموضح بالشكل (5-1) مقطعه منتظم ويخضع إلى مجموعة من الأحمال (P_1, P_2, P_3) , وهذه الأحمال تعمل في المستوى الرأسي المار من محور الجائز بحيث تعطي عزم الإنعطاف حول المحور الأفقي z .



الشكل (5- 1)

ولنأخذ جزءاً صغيراً (dx) من الجائز بين مقطعين متوازيين (AB ,CD) كما في الشكل (5--1a) ، وبعد عملية التحميل يأخذ الجزء المذكور الوضعية المبينة في الشكل (5--1a) .
ومن الواضح أن الألياف السفلية ستزداد في الطول أي أنها تكون في حالة الشد , بينما يتناقص طول الألياف العلوية أي أنها تكون في حالة الضغط , وعلى هذا فإذا كانت المادة مستمرة من

الأعلى إلى الأسفل فإنه لابد من وجود ليف لايتعرض لأي زيادة أو نقصان،أي سيبقى على طوله الأصلي وهذا الليف يدعى الليف المحايد (المحور المحايد) .



الشكل (5−1a)

وإذا حصل الانتقال بعد التحميل فإن المحور المحايد يالشكل جزءاً من قوس دائرية ذات قطر (2R) , وأن الزاوية $(d\alpha)$ المحصورة بين المقطعين عند مركز القوس ذات الطول (dx) تساوي $\frac{dx}{R}$ أو أن :

$$dx = R.d\alpha$$

وبما أن المقاطع تبقى مستوية بعد التحميل (فرضية بيرنوللي) فإن مخطط التشوهات النسبية سيكون خطياً . وعلى مسافة (y) من المحور المحايد يصبح الطول الجديد لهذا الليف بعد التحميل مساوياً $(R+y)d\alpha$

وعلى هذا يكون التغير في طول الليف مساوياً :

$$(R+y)d\alpha - R\,d\alpha = y\,d\alpha$$

وبالتالي فإن التشوه النسبي يساوي :

$$\frac{y\,d\alpha}{R\,d\alpha} = \frac{y}{R}$$

ومن قانون هوك . فإن التشوه النسبي يساوي :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

وبالتالي $\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R}$, ولكن الإجهاد في الليف الواقع على مسافة (y) من المحور المحايد يساوي $\sigma = \frac{M}{I} y$ أي $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{R}$ وبالتالي نصل إلى العلاقة :

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$$

حيث R : نصف قطر الانحناء للعنصر بين المقطعين .

ومعادلة نصف قطر الانحناء من أجل المنحني في المستوي x , y هي :

حيث y هي المحور الذي يحدد السهم أو الإنتقال الشاقولي

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

وبما أن الخط المرن ذو انحناء بسيط فإن $(\frac{dy}{dx})^2$ سيكون صغيراً جداً يمكن إهماله أي :

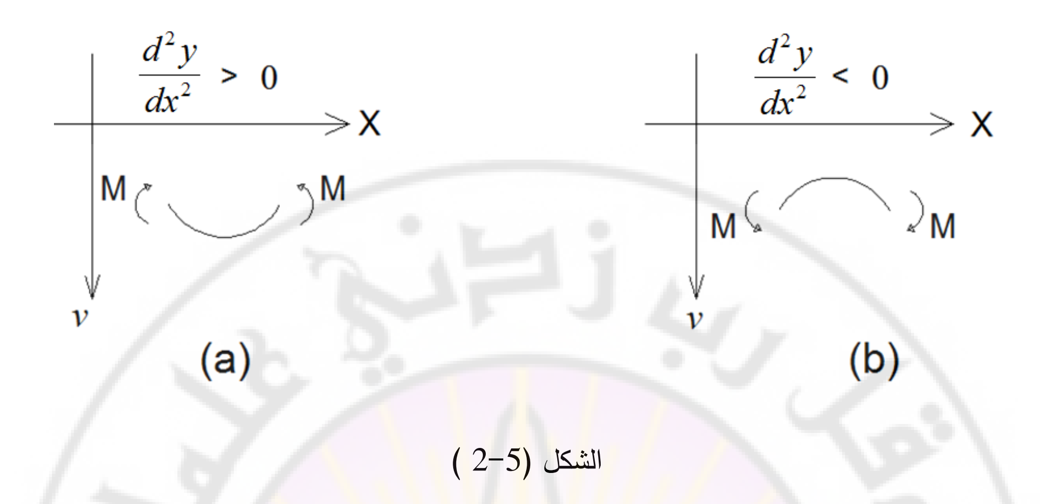
$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية للمحور المرن للجائز يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI} \qquad 1-5$$

وفي الحالات التي لا تكون $\frac{dy}{dx}$ صغيرة فإن حلها يتطلب تكاملاً معقداً وهذا خارج بحثنا .

وتختلف إشارة المشتق الثاني للانتقال (السهم) باختلاف اتجاه المحور y ، فإذا اعتمدنا اتجاه المحور نحو الأسفل (الشكل 5–2– a) ،فإن الجائز المعرض إلى عزم انعطاف موجب (المزدوجة المطبقة إلى يسار المقطع المدروس تؤثر باتجاه عقارب الساعة) يؤدي إلى تقعر الجائز نحو الأعلى (الشكل 5– 2)



الشكل (5-2)

وبالتالي فإن إشارة المشتق الثاني ستكون سالبة أي تخالف إشارة عزم الانعطاف،ولابد إذاً من اعتماد إشارة (-) للمشتق الثاني في المعادلة التفاضلية للمحور المرن.

وفي الحالة التي يتعرض فيها الجائز إلى عزم انعطاف سالب يؤدي إلى شد الألياف العليا وإلى تقعر الجائز نحو الأسفل الشكل (5-2-b) تكون إشارة المشتق الثاني للانتقال موجبة أي تعاكس إشارة عزم الانعطاف وتأخذ معادلة المحور المرن الشكل النهائي التالي :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \qquad (2-5)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للخط المرن . ويمكن الحصول على قيمة الانتقال والدوران من هذه المعادلة بعدة طرق وسنكتفي بالطريقتين التاليتين :

1- طريقة التكامل المزدوج .
2- طريقة الجائز المرافق .

2-5 طريقة التكامل المزدوج

وتستعمل المعادلة العامة للخط المرن :

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

وفي حال كون عزم العطالة للجائز متغيراً نجد :

$$E\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{I}$$

وفي هذه الطريقة يكتب تغير ميل المماس بدلالة عزم الانعطاف عند أي مقطع . وبإجراء التكامل الأول للمعادلة نحصل على معادلة الميل , والتكامل الثاني يعطي معادلة الانتقالات , أما ثوابت التكامل فيمكن الحصول عليها من شروط المساند. وعلينا أن نجري هذا التكامل لكل مجال من مجالات الجائز عندما يختلف فيه تابع عزم الانعطاف , ويعطينا التكامل الأول تابع زوايا الدوران :

$$EI\,\frac{dy}{dx} = \int M(x)dx + C$$

ومنه :

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\int M(x)dx + C$$

وبالتكامل مرة أخرى نحصل عل معادلة المحور المرن للجائز .

$$EI\,y = \int dx \int M(x)\,dx + Cx + D$$

ومنه :

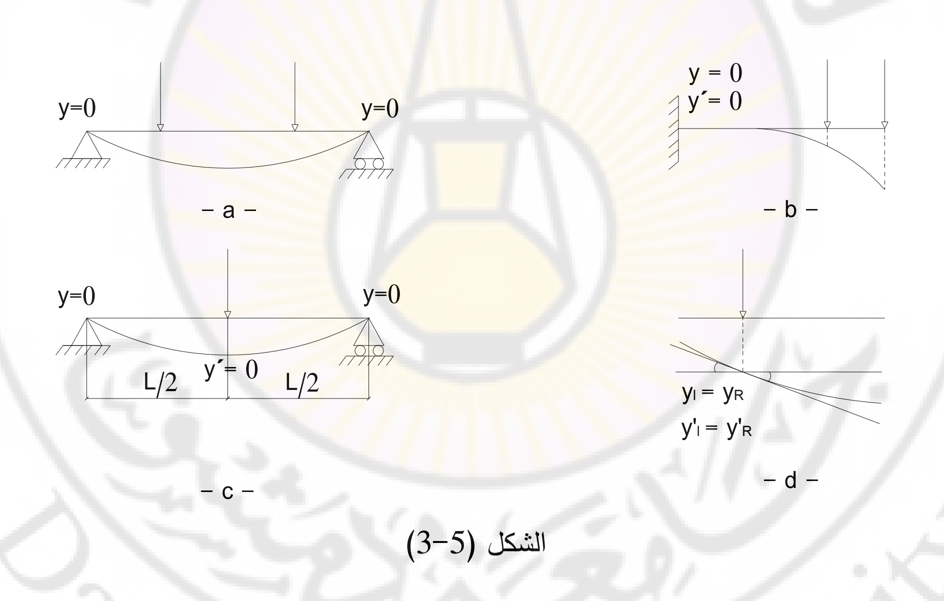
$$y = \frac{1}{EI} = \int dx \int M(x)\,dx + Cx + D$$

إن ثوابت التكامل C وD تعين من شروط التشوه في نقاط استناد الجائز أو في النقاط الفاصلة بين مجالات الجائز . ولنستعرض شروط التشوه في بعض الحالات البسيطة الشكل (5-3)

1- جائز بسيط معرض لحمولات خارجية مفروضة إن انتقال الجائز في نقاط الاستناد يساوي الصفر، ذلك لأن المساند لا تسمح بالانتقال الشاقولي وإن كانت تسمح بالدوران الشكل5(-3a)

2- جائز ظفري موثوق في إحدى نهايته ومعرض لحمولات خارجية مفروضة .

نظراً لأن الوثاقة لاتسمح بالدوران ولا بالانتقال الشاقولي أو الأفقي فإن زاوية الدوران في المقطع العرضي المار من الوثاقة تساوي الصفر ،كما أن انتقال هذا المقطع يساوي الصفر أيضاً الشكل(5-3- b) .



الشكل (5-3)

3- جائز بسيط معرض لحمولة شاقولية مركزة في منصف الفتحة الشكل(5-3-c)

إن الخط المرن للجائز في هذه الحالة يكون متناظراً لذا فإن المماس للمنحني في ذروة الخط يكون موازياً لمحور الجائز وتكون هذه الذروة في منتصف الفتحة أي عندما :

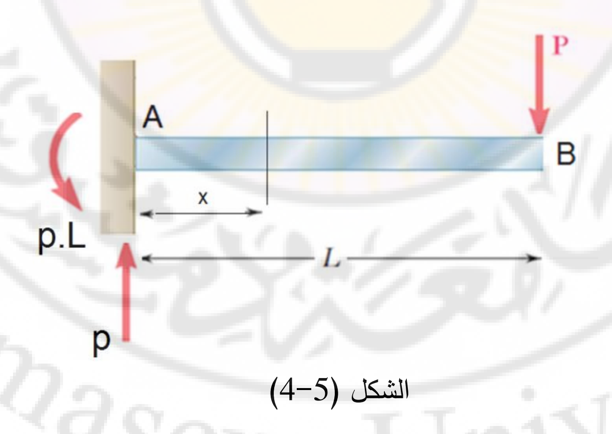
$$x = \frac{1}{2} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

4 – جائز بسيط معرض لحمولة مركزة في إحدى نقاطه C :

إلى جانب شروط التشوه المذكور في البند الأول نضيف أن الانتقال وزاوية الدوران في المقطع المار من النقطة C والمعين من دراسة المعادلة التفاضلية للخط المرن في المجالAC (إلى اليسار من C) يساوي الانتقال في المقطع المار من هذه النقطة والمعين من دراسة المعادلة التفاضلية وزاوية الدوران للمحور المرن في المجال CB(إلى اليمين من C) .
الشكل(5-3-d) ويمكن أن نعمم هذا الشرط على كل مقطع فاصل بين مجالين متجاورين من جائز مدروس .

مثال 5-1

يطلب دراسة الخط المرن لجائز ظفري موثوق في المسند ومعرض لحمولة مركزة P في نهايته الحرة B ، علماً بأن الجائز ذو مقطع ثابت على كامل طوله .



الشكل (5-4)

الحل :

نأخذ مقطعاً في الجائز يبعد عن مبدأ الاحداثيات بالمقدار x فنكتب معادلة عزوم الانـــعطاف (نعتبر مبدأ الاحداثيات في الوثاقة) .

$$M(x) = p.x - p.L$$

وبتطبيق المعادلة التفاضلية للمحور المرن يمكننا أن نكتب :

$$EI\,y'' = EI\,\frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Px + PL$$

وبإجراء التكامل الأول :

$$EI\,y' = EI\,\frac{dy}{dx} = PL\,x - p - \frac{x^2}{2} + C_1$$

ومن ظروف المساند نجد أنـه في الوثـاقة (a) تنـعدم زاويـة الدوران أي عنـدما (x = 0) فإن $\theta_a = 0$ وبالتالي $C_1 = 0$.

$$EI\,y' = PL\,x - p - \frac{x^2}{2}$$

وبإجراء التكامل الثاني :

$$EI\,y = PL\frac{x^2}{2} - P\frac{x^3}{6} + C_1.x + C_2$$

ومن ظروف المساند مرة أخرى نجد أنه عند الوثاقة (a) ينعدم الانتقال أي عندما (x = 0)

فإن $y_a = 0$ وبالتالي $C_2 = 0$.

$$EI\,y = PL\frac{x^2}{2} - p\frac{x^3}{6}$$

وهـي معادلـة الخط المرن ويمكـن استعمالها لتعيين قيمـة السـهم (الانتقـال) عند أيـة نقطـة من الجائز المدروس وتكون قيمة الانتقال أعظمية عندما (x =L) أي في في النهاية (b) .
إن الثـابتين C_1 و C_2 يسـاويا الصـفر نظـراً لأن المقطـع العرضـي المـار مـن مبـدأ الاحـداثيات موثوق وبالتالي فإن زاوية الدوران والانتقال في هذا المقطع يساويان الصفر

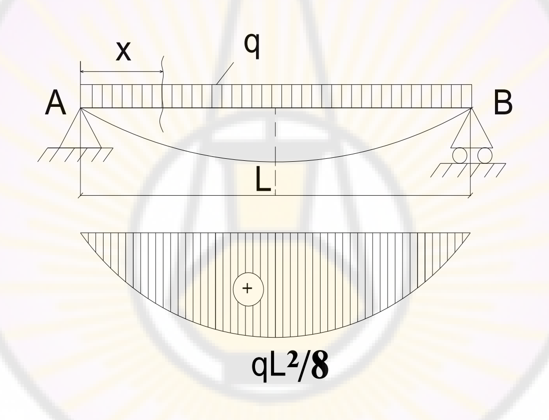
ويتضـح من دراسـة معادلـة الخط المرن أن الانتقال سيكون أعظمياً في النقطـة B النهايـة الحرة للجائز كما أن زاوية الدوران في المقطع المار من النقطة B تكون أعظميةً أيضاً .

نعين مقدار الانتقال في النقطة B من المعادلة وباعتبار $x = l$:

$$y_{B(\max)} = \frac{1}{EI}(p\frac{L^3}{2} - P\frac{L^3}{6}) = +\frac{Pl^3}{3EI}$$

مثال 5−2

جائز بسيط محمل بحمولة موزعة بانتظامكما هو مبين بالشكل (5−5) المطلوب إيجاد معادلة الخط المرن وقيمة السهم في المنتصف والميل على المسند الأيسر .



الشكل (5−5)

الحل :

1- إيجاد ردود الفعل

مما سبق نعلم أن :

$$R_A = \frac{ql}{2} \quad , \quad R_B = \frac{ql}{2}$$

2- معادلة العزم M

نعتبر مقطعاً على بعد x ونكتب معادلة العزم في ذلك المقطع :

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

من هذه المعادلة (قطع مكافىء) نرسم مخطط العزم كما هو واضح بالشكل (5-5) ، حيث نلاحظ أن قيمة العزم الأعظمي في المنتصف تساوي $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$

معادلة الخط المرن :

$$EI\,y'' = -M$$

نعوض M بقيمتها من المعادلة التي حصلنا عليها :

$$EI\,y'' = -\frac{ql}{2}x + \frac{q\,x^2}{2}$$

نكامل بالنسبة لـ x :

$$E\,I\,y' = -\frac{qx^2l}{2.2} + \frac{q}{2}\,\frac{x^3}{3} + C \qquad (1)$$

$$E\,I\,y' = -\frac{qx^2l}{4} + \frac{qx^3}{6} + C$$

إن المعادلـة (1) هـي معادلـة الميـل أي معادلـة y' . وللحصـول علـى معادلـة الخط المـرن نكامل مرة ثانية ، أي :

$$E\,I\,y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + Cx + D \qquad (2)$$

3- تحديد الثوابت غير المعينة C و D .

الشروط الحدية هي :

عندما $x = 0$ تكون $y = 0$

عندما $x = \frac{l}{2}$ تكون $y' = 0$

نبدل x بـ $\frac{l}{2}$ في المعادلة (1) و y' بالصفر نجد :

$$C = \frac{ql^3}{24}$$

ثم نبدل x بصفر في المعادلة الثانية $D = 0(2)$ وتكون معادلة الخط المرن :

$$y = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{24}\right\} \qquad (3)$$

ومعادلة الميل هي :

$$\theta = y' = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}\right\} \qquad (4)$$

4– قيمة السهم في المنتصف (القيمة العظمى) :

نبدل x و $\frac{l}{2}$ في معادلة الخط المرن نجد :

$$y_c = \frac{5}{385}\frac{ql^4}{EI}$$

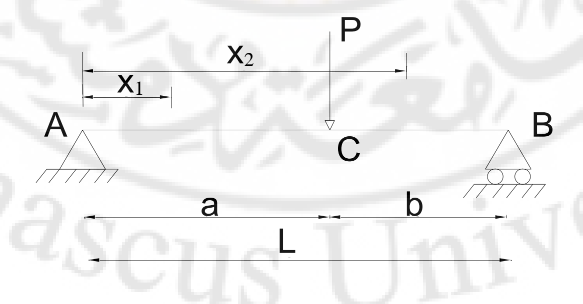
أما الميل الزاوي على المسند A الذي هو الميل الأعظمي نحصل عليه بتبديل x بالصفر في معادلة الميل (4) :

$$y'_A = \frac{ql^3}{24EI}$$

مثال 5–3

جائز بسيط محمل بحمولة مركزة pعلى مسافة (a) من المسند الأيسر وعلى مسافة (b) من المسند الأيمن كما هو موضح بالشكل (5–6) .

والمطلوب إيجاد معادلتي الخط المرن في المجالين (a,b) ثم إيجاد السهم عند نقطة تأثير القوة



الشكل (5–6)

الحل :

مما سبق نعلم أن ردود الأفعال في المسندين :

$$R_A = \frac{pb}{L} \qquad , \qquad R_B = \frac{Pa}{L}$$

نفرض مقطعاً على مسافة x_1 من المسند (A) وبالتالي فإن معادلة العزم في المجال الأول من (A) وحتى نقطة تطبيق القوة هي :

$$M_1 = \frac{Pb}{L} x_1$$

ومعادلة العزم في المجال الثاني (نعتبر مقطعاً آخر على بعد x_2 من A) :

$$M_2 = \frac{P.b}{L} x_2 - p(x_2 - a)$$

إن المعادلة التفاضلية للخط المرن في الشكلها العام هي :

$$EI\, y'' = -M$$

وبالتالي ففي المجال الأول :

$$EI\, y_1'' = -\frac{pb}{L} x_1$$

والتكامل الأول :

$$EI\, y_1' = -\frac{pb}{2L} x_1 + c_1$$

والتكامل الثاني :

$$EI\, y_1 = -\frac{pb}{6L} x_1^3 + c_1 x_1 + D_1$$

وفي المجال الثاني :

$$EI\, y_2'' = -\frac{pb}{L} x_2 + p(x_2 - a)$$

والحد الثاني $p(x_2 - a)$ في هذه المعادلة يمكن تكامله على الشكل التالي :

$$\int p(x_2 - a)\, dx_2 = \int p(x_2 - a)\, d(x_2 - a) = \frac{p(x_2 - a)^2}{2} + c_2$$

ويمكن أن نعتمد هذه الطريقة في التكامل لسهولتها . وبالتالي فإن معادلة الميل في المجال الثاني :

ومعادلة الخط المرن في المجال الثاني :

$$EI\,y_2 = -\frac{pb}{6L}x_2^3 + \frac{p(x_2-a)^3}{2} + c_2x_2 + D_2$$

وهكذا نجد لدينا أربعة ثوابت هي : C_1 , C_2 , D_1 , D_2

ولايجاد الثوابت الأربعة هذه لابد من إيجاد أربعة شروط :

عندما $x_1 = 0$ فإن $y_1 = 0$

عندما $x_2 = L$ فإن $y_2 = 0$

وأما الشرطان الأخيران فبمكن الحصول عليهما من شروط التشوه في المقطع C تحت الحمل P وذلك عندما تتناهى x_1 إلى (a) و x_2 إلى (a) أي المقطع تحت الحمل والفاصل بين المجالين الأول والثاني :

عندما $x_1 = a$ نحصل على قيمة من أجل (y) وهي (y_1) وقيمة من أجل (y') هي (y'_1)

وعندما $x_2 = a$ نحصل على قيمة من أجل (y) وهي (y_2) وقيمة من أجل (y') هي (y'_2)

ولكن قيمة الانتقال والميل واحدة في ذلك المقطع أي :

$$y_1 = y_2$$
$$y'_1 = y'_2$$

وهذان هما الشرطان المطلوبان .

وهكذا من كل مقطع فاصل بين مجالين متجاورين نحصل على شرطين من شروط التشوه .

نعوض عن x_1, x_2 بـ a في معادلتي الميل (معادلة الميل في المجال الأول ومعادلة الميل في المجال الثاني) ونساوي الطرفين الأيمنين :

$$-\frac{pb}{L}\frac{a^2}{2}+c_1=-\frac{pb}{L}\frac{a^2}{2}+\frac{p\,(a-a)^2}{2}+c_2$$

ومنه :

$$c_1=c_2$$

وكذلك نعوض عن x_1, x_2 بـ (a) في معادلتي السهم ونساوي الطرفين الأيمنين بناء على الشرط السابق .

$$-\frac{pb}{L}\ \frac{a^2}{6}+C_1\,a+D_1=-\frac{pb}{L}\ \frac{a^2}{6}+\frac{p\,(a-a)^3}{6}+c_2a+D_2$$

من هذه المعادلة نجد :

$$D_1=D_2$$

وبهذا الشكل فثوابت التكامل اثنتان بدلاً من أربعة . وحصلنا على هذا بفضل الطريقة التي اتبعناها في مكاملة المعادلة التفاضلية

ولتحديد الثابتين المعنيين نستخدم شروط التشوه على المسندين A و B :

على المسند A $\begin{Bmatrix} x_1=0 \\ y_1=0 \end{Bmatrix}$

على المسند B $\begin{Bmatrix} x_2=0 \\ y_2=0 \end{Bmatrix}$

نعوض في معادلة الخط المرن للمجال الأول بشروط التشوه على المسند A فنجد :

$$D_1=D_2=0$$

ثم نعوض في معادلة الخط المرن للمجال الثاني بشرط التشوه على المسند B فنجد :

$$0=-\frac{pb}{L}\ \frac{L^2}{6}+\frac{p\,(L-a)^2}{6}+C_2L$$

ومن هذه المعادلة نجد :

$$C_1=C_2=\frac{pb}{6L}(L^2-b^2)$$

وهكذا تأخذ معادلة الميل ومعادلة الخط المرن الشكل التالي :

– في المجال الأول :

$$y_1' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{2L}x_1^2 + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\right]$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{6L}x_1^3 + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\,x_1\right]$$

– في المجال الثاني

$$y_2' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{2L}x_2^2 + \frac{P(x_2 - a)^2}{2} + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{6L}x_2^3 + \frac{P(x_2 - a)^3}{2} + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\,x_2\right]$$

لايجاد قيمة الانتقال (السهم) تحت تأثير الحمولة يكفي أن نبدل في معادلة الخط المرن في المجال الأول x_1 بـ a أو نبدل في معادلة الخط المرن في المجال الثاني x_2 بـ a لنحصل على قيمة السهم .

من المعادلة الأولى :

$$y_{1_{(c)}} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{6L}a^3 + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\,a\right]$$

ومن المعادلة الثانية :

$$y_{2_{(c)}} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{6L}a^3 + 0 + \frac{pb}{6L}(L^2 - b^2)\,a\right]$$

ونلاحظ أن قيمة السهم الأعظمي (y_{max}) هي في المقطع حيث $y' = 0$, ولإيجاد بعد ذلك المقطع عن المسند الأيسر يكفي أن نبدل y' بصفر في معادلة الميل ونجد قيمة x_1 .

3-5 طريقة الجائز المرافق لتعيين التشوهات (الطريقة التحليلية- التخطيطية)

نتبع هذه الطريقة إذا تعددت مجالات المسألة , أو تغيرت عزم عطالته أو إذا احتوى الجائز مفصلاً أو أكثر .

رأينا فيما سبق أن علاقة عزم الانعطاف M بالحمولة الموزعة q هي :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

والمعادلة التفاضلية للمحور المرن (محور الجائز المنحني) هي :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

نلاحظ وجود تشابه بين هاتين العلاقتين , لذا فمسألة الانتقالات يمكن تحويلها إلى مسألة تعيين العزوم الناتجة عن حمولة وهمية تسمى بالحمولة المرنة , مؤثرة على جائز وهمي يدعى الجائز المرافق قيمتها :

$$q_\phi = \frac{M}{EI} \qquad (3-5)$$

فالعزم الناتج عن تلك الحمولة M_ϕ , يساوي السهم y الناتج عن الحمولة الحقيقية المؤثرة في الجائز الحقيقي , وبما أن :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi$$

$$\frac{dM_\phi}{dx} = Q_\phi$$

بالتالي يمكن القول إن زاوية الدوران في الجائز الحقيقي المعطى , تساوي عددياً القوة القاصة في الجائز المرافق أي :

$$\varphi = Q_\phi \qquad , \qquad y = M_\phi$$

وبناء على ماذكر فإنه يمكن تحديد السهم y وزاوية الدوران φ في أي مقطع من الجائز الخاضع للانعطاف وذلك باتباع الخطوات التالية :

1- نرسم مخطط العزم للجائز المعطى وذلك بعد حساب ردود أفعاله

2- نعتبر عزم الانعطاف حمولة وهمية (مرنة) مطبقة على الجائز المرافق وذلك بعد تقسيمها على القساوة EI ، بحيث نعتبر كل عزم موجب حمولة موجهة للأسفل، وكل عزم سالب حمولة موجهة للأعلى .

3- لحساب الانتقال (السهم) في أي نقطة , نحسب العزم في تلك النقطة في الجائز المرافق مقسوماً على صلابة الجائز.

$$y = \frac{\overline{M}_x}{EI} = M_\phi \qquad (4-5)$$

4- لحساب دوران أي نقطة نحسب القص في الجائز المرافق وفي النقطة المطلوبة

$$\varphi = \frac{\overline{Q}_x}{EI} = Q_\phi \qquad (5-5)$$

ويتم اختيار الجائز المرافق بالشكل تحقق فيه العلاقتان (5-4) (5-5) شروط التشوه في جميع مقاطع الجائز وخاصة في نقاط الاستناد، وذلك كما هو مبين بالجدول (5-1)

الجدول (5-1)

الجائز المدروس		**الجائز المرافق**	
نوع الاستناد	شروط التشوه عند المسند	القص الوهمي العزم الوهمي	نوع الاستناد الموافق
وثاقة	$\varphi = 0$ $y = 0$	$\overline{Q} = 0$ $\overline{M} = 0$	نهاية حرة
نهاية حرة	$\varphi \neq 0$ $y \neq 0$	$\overline{Q} \neq 0$ $\overline{M} \neq 0$	وثاقة
مسند مفصلي في إحدى نهايتي الجائز	$\varphi \neq 0$ $y = 0$	$\overline{Q} \neq 0$ $\overline{M} = 0$	مسند مفصلي
مسند مفصلي داخلي	$\varphi \neq 0$ $y = 0$	$\overline{Q} \neq 0$ $\overline{M} = 0$	مفصل دخلي
مفصل داخلي	$\varphi \neq 0$ $y \neq 0$	$\overline{Q} \neq 0$ $\overline{M} \neq 0$	مسند مفصلي داخلي

إن استخدام طريقة الجائز المرافق يتطلب حساب المساحة وتعيين مركز الثقل للأجزاء المختلفة من مخطط الحمولة الوهمية (مخطط عزم الانعطاف) , ويعطي الجدول (5−2) المساحة ومركز الثقل للأشكال الهندسية التي غالباً ما تصادفنا .

تعتبر طريقة الجائز المرافق (الطريقة التحليلية – التخطيطية) طريقة عملية لدراسة التشوهات (الانتقالات وزوايا الدوران) في الجوائز وخاصة في الحالات التي يطلب فيها تعين التشوهات في مقطع واحد أو في مقاطع محدودة من الجائز .

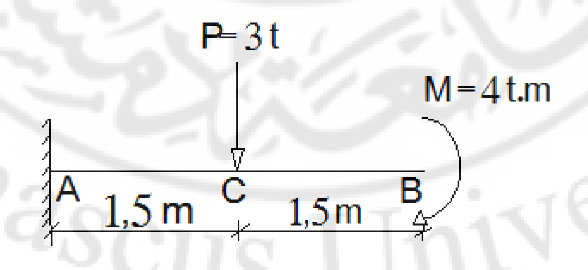
الجدول (5−2)

الشكل الهندسي و أبعاده	المساحة ω	بعد مركز الثقل X_c
مستطيل Xc h b	$b.h$	$\frac{1}{2}.b$
مثلث Xc h b	$\frac{1}{2}.b.h$	$\frac{1}{3}.b$
ربع قطع مكافئ من الدرجة الثانية Xc h b	$\frac{1}{3}.b.h$	$\frac{1}{4}.b$

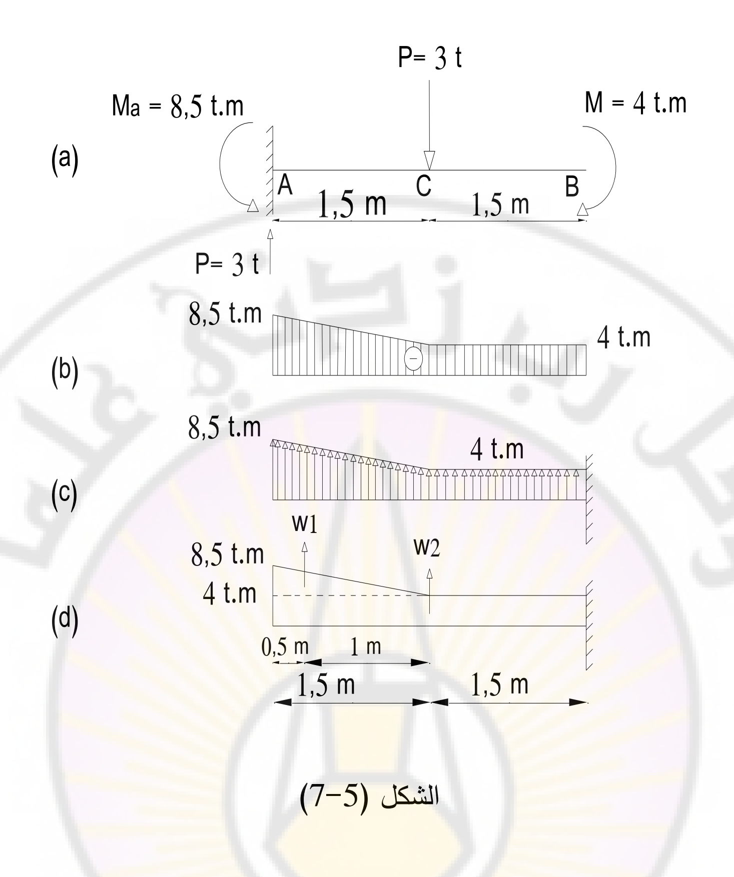
$\frac{1}{5}.b$	$\frac{1}{4}.b.h$	ربع قطع من الدرجة الثالثة (Xc, h, b)
$\frac{3}{8}.b$	$\frac{2}{3}.b.h$	ربع قطع من الدرجة الثانية (b, h, Xc)
$\frac{2}{5}.b$	$\frac{3}{4}.b.h$	ربع قطع من الدرجة الثالثة (b, h, Xc)

مثال (5−4)

يطلب تعيين الانتقال وزاوية الدوران في المقطع العرضي الواقع عند الطرف الحر من الجائز المبين بالشكل (5−7) علماً بأن $EI = const$.



الشكل (5−7)



الشكل (5−7)

الحل :

نرسم مخطط عزم الانعطاف في الجائز الشكل (5−7−b)، ونعده مخططاً لحمولة وهمية مطبقة على الجائز المرافق الشكل (5−7−c) ، ولتسهيل الحساب فإننا نقسم هذا المخطط إلى جزأين , أحدهما مثلث مساحته w_1 و الثاني مستطيل مساحته w_2 الشكل (5−7−d) .

فنجد أن :

$$w_1 = \frac{1}{2}.1,5.4,5 = 3,375\ t.m^2$$

$$w_2 = 3.4 = 12\ t.m^2$$

وبالتالي فإن :

$$\varphi_b = \frac{\overline{Q}_b}{EI} = \frac{1}{EI}.(w_1 + w_2) = +\frac{15,375}{EI} \quad Rad$$

أي أن المقطع B يدور باتجاه دوران عقارب الساعة , وقيمة هذا الدوران تساوي إلى رد الفعل الوهمي في الوثاقة B من الجائز المرافق $(\overline{R}_b = w_1 + w_2)$ مقسوماً على صلابة الجائز المدروس .

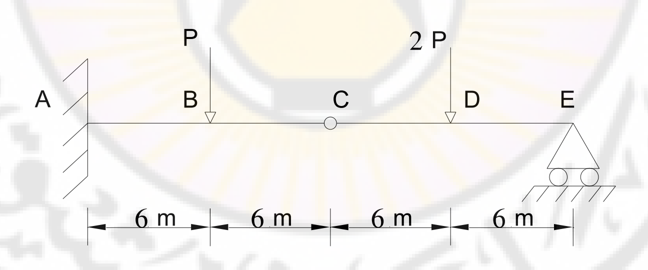
$$y_b = \frac{\overline{M}_b}{EI} = \frac{1}{EI}.\left[w_1.(1,5+\frac{2}{3}.1,5) + w_2.1,5 \right]$$

$$y_b = \frac{1}{EI} = (3,375.2,5+12.1,5) = \frac{26,44}{EI} m$$

أي أن المقطع B ينتقل شاقولياً نحو الأسفل , وقيمة هذا الانتقال تساوي العزم الوهمي في الوثاقة B من الجائز المرافق مقسوماً على الصلابة EI .

مثال (5–5)

للجائز المبين في الشكل (5–8) احسب الانتقال الأعظمي بطريقة الجائز المرافق



الشكل (5–8)

الحل :

نرسم مخطط عزم الانعطاف للجائز الأصلي الشكل (5–8–a) ،ثم نعد عزم الانعطاف حمولة مطبقة على الجائز المرافق بعد تقسيمه على EI وبحيث يكون العزم الموجب حمولة للأسفل والعزم السالب حمولة للأعلى، الشكل (5–8–b) .

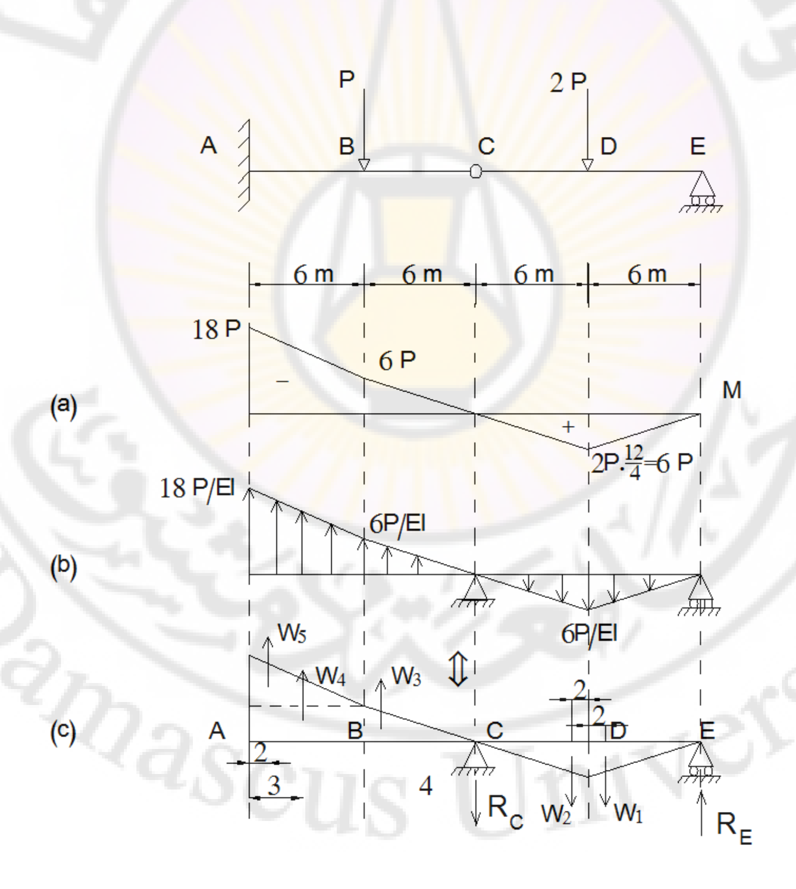
لتسهيل الحساب فإننا نقسم هذا المخطط إلى أشكال مستطيلة ومثلثية الشكل (c-8-5) فنجد أن:

$$w_1 = w_2 = \frac{6p}{EI}.\frac{6}{2} = \frac{18P}{EI}$$

$$w_3 = \frac{6p}{EI}.\frac{6}{2} = \frac{18P}{EI}$$

$$w_4 = \frac{6p}{EI}.6 = \frac{36P}{EI}$$

$$w_5 = \frac{12p}{EI}.\frac{6}{2} = \frac{36P}{EI}$$



الشكل (5-8)

$$\sum \overline{M}_E = 0 \Rightarrow \overline{R}_c = \frac{135}{EI}$$

$$\sum y_i = 0 \quad \Rightarrow \overline{R}_E = \frac{81}{EI}$$

$$y_A = 0$$

$$y_B = \overline{M}_B = \frac{36}{EI}.4 + \frac{36}{EI}.3 = +\frac{252}{EI}$$

$$y_c = \overline{M}_C = \frac{36}{EI}.10 + \frac{36}{EI}.9 + \frac{18}{EI}.4 = +\frac{756}{EI}P$$

$$y_D = \frac{36}{EI}.16 + \frac{36}{EI}.15 + \frac{18}{EI}.10 - \frac{135}{EI}.6 - \frac{18}{EI}.2 = \frac{450}{EI}$$

$$y_E = 0$$

لدينا

كما هو واضح فإن الانتقال الأعظمي عند المفصل C أي $y_{max} = \frac{756}{EI}$

الفصل السادس

الخواص الهندسية للمقاطع

للخصائص الهندسية للمقاطع المستوية علاقة مباشرة بحساب الإجهادات والانفعالات ومساحة المقطع العرضي تلعب دورا" أساسيا" في تحديد قيمة هذه الاجهادات ويفترض على الطالب أن يكون ملماً من خلال دراسة الميكانيك الهندسي ، وتتلخص هذه الخواص بما يلي :

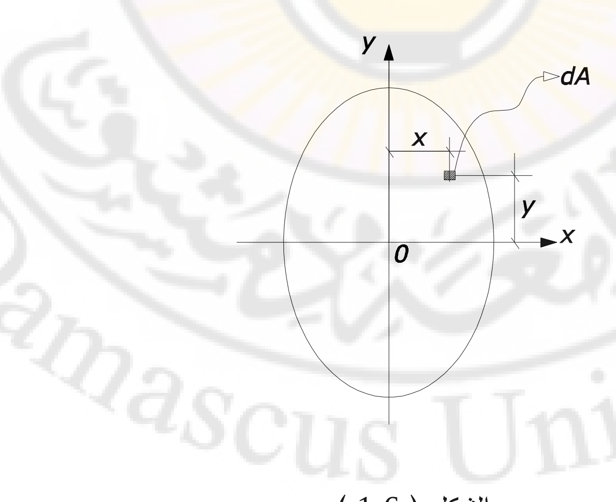
1-6 مركز المساحة :

يمكن عدّ مساحة أي مقطع تتكون من عدد لانهائي من عناصر المساحة. ويمثل مركز المقطع النقطة 0 التي تؤثر عندها محصلة هذه العناصر.

تعين المساحة A الكائنة في مستوى الاحداثيات x , y الشكل (6-1) بمجموع مساحات الأجزاء الصغيرة المالشكلة لهذا المقطع وهي تساوي :

$$A = \int dA \qquad (1-6)$$

حيث: dA : مساحة جزء متناه في الصغر وتكون وحداتها cm^2, m^2



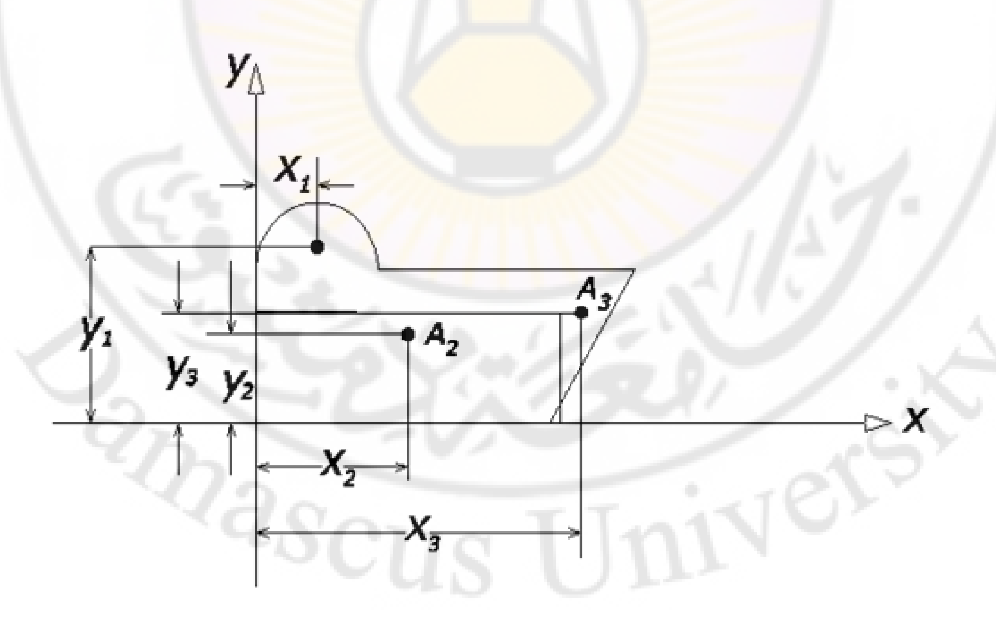
الشكل (6-1)

في بعض الأحيان تتكون مساحة المقطع من عدد من المساحات المنتظمة التي يسهل تحديد مساحة ومركز كل منها. وتتركب بعض المقاطع الانشائية من عدد من مقاطع الصلب القياسية على الشكل I ، التي يمكن الحصول على خواصها المختلفة ، بما في ذلك مساحة وموقع مركز كل مقطع من جداول خاصة أعدت خصيصا" لهذا الغرض. ويبين الشكل(6-2) مثال لهذا النوع من المقاطع المركبة. ويمكن تحديد المركز في هذه الحالة بتطبيق مبدأ العزوم .

وعلى سبيل المثال , يمكن تحديد مركز المقطع المركب المبين في الشكل(6-2) بتقسيم المساحة إلى نصف دائرة ومستطيل ومثلث , وتخيل أن مساحة كل جزء مركزة عند مركز ثقله , ثم نطبق مبدأ العزوم بالنسبة لأي محوريين مناسبين مثل x,y فنجد :

$$\bar{x} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A} \qquad (2-6)$$

$$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A} \qquad (3-6)$$



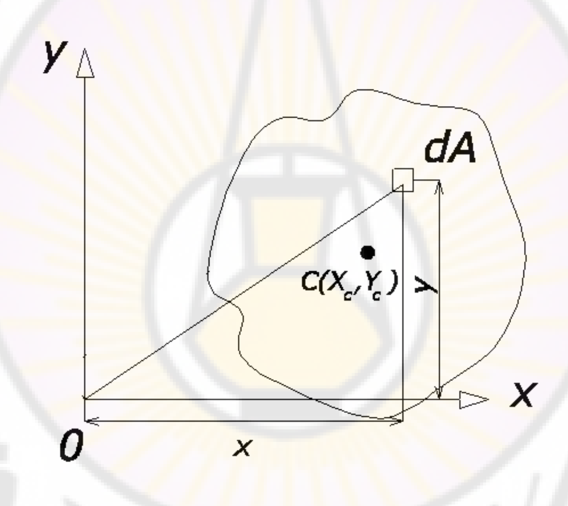
الشكل (6-2)

2-6 العزم الستاتيكي لمقطع

العزم الستاتيكي لمقطع ما بالنسبة إلى محور ما x , واقع في المستوي نفسها الشكل (3-6) وهو المجموع الجبري لجداء المساحات الجزئية dA، التي يتألف منها المقطع في المسافة التي تفصلها عن هذا المحور . وُيرمز له بالرمز (S) متبوعاً بحرف آخر يبين المحور أو الخط في مستوي المساحة ، والذي يؤخذ حوله هذا العزم ويحدد من العلاقة :

$$S_X = \int_A y\,dA \qquad cm^3 \qquad (4-6)$$

حيث y المسافة بين المساحة الأولية dA وبين المحور X .



الشكل (3-6)

ويمكن أن يكون العزم موجباً أو سالباً ، وأحياناً مساوياً للصفر ، وإذا تطابقت المساحة مع القوة فإن التكامل (4-6) يمكن عده ، كمجموع لعزوم القوى dA بالنسبة إلى المحور x ،

وطبقاً لما نعرفه من الميكانيك النظري ، فمن الممكن كتابة معادلة عزم المحصلة كما يلي :

$$S_X = \int_A y\,dA = A\,y_c \qquad (5-6)$$

حيث : A– المساحة الكلية للالشكل

y_c – المسافة بين مركز ثقل الشكل والمحور X .

ونستخلص من العلاقة (6-5) صيغة لتحديد الإحداثي الرأسي لمركز النقل :

$$y_c = \frac{S_X}{A} \qquad (6-6)$$

وكذلك فإن العزم الستاتيكي بالنسبة إلى المحور y يساوي :

$$S_y = \int_A x\, dA = A\, x_c \qquad (7-6)$$

ومن هنا :

$$x_c = \frac{S_y}{A} \qquad (8-6)$$

ومما سبق نستنتج ، أنه إذا مر كل من المحورين x , y بمركز ثقل الجسم ، فإن العزم الستاتيكي بالنسبة لكل منهما يساوي صفراً .

وتسمى هذه المحاور بالمحاور المركزية ، والمحور المركزي هو المحور الذي ينعدم العزم الستاتيكي بالنسبة له .

وإذا أمكن تصور الشكل ، كعدة أشكال بسيطة (مربعات ، مثلثات ....إلخ) تكون مراكز ثقلها معروفة فإن العزم الستاتيكي للالشكل بأجمعه يمكن الحصول عليه بجمع العزوم الستاتيكية

لهذه الأشكال البسيطة وهذا يستنتج مباشرة من خصائص التكامل المحدود .

وإذا كان للالشكل محور تماثل فإن محور التماثل يمر دائماً بمركز ثقل الشكل ولذا فإن العزم الستاتيكي للشكل بالنسبة إلى محور التماثل يساوي الصفر .

مثال (6-1) :

أوجد عزوم مساحة شبه المنحرف المبين بالشكل (6-4) بالنسبة للمحور x وكذلك الإحداثي y لمركز ثقله .

الحل :

يمكن تقسيم شبه المنحرف إلى مثلثين (1) و(2) حيث مساحة كل منهما

$$A_1 = \frac{b.h}{2}$$

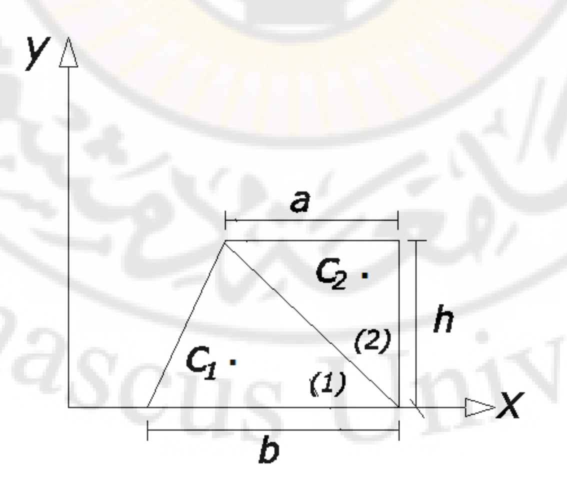
$$A_2 = \frac{a.h}{2}$$

وتكون المساحة الكلية :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{(a+b)}{2}$$

ويكون الإحداثي y_c لكل من المثلثين :

$$y_{c_1} = \frac{h}{3} \quad , \quad y_{c_2} = \frac{2}{3}h$$



الشكل (6-4)

وبالتالي يكون عزم المساحة بالنسبة للمحور x :

$$S_x = y_{c_1} \, . A_1 + y_{c_2} \, . A_2$$

$$= \frac{h}{3} . \frac{b.h}{2} + \frac{a.h}{2} . \frac{2}{3} h$$

$$= b \, . \frac{h^2}{6} + \frac{a.h^2}{3} = \frac{h^2}{6} (b + 2.a)$$

فيكون :

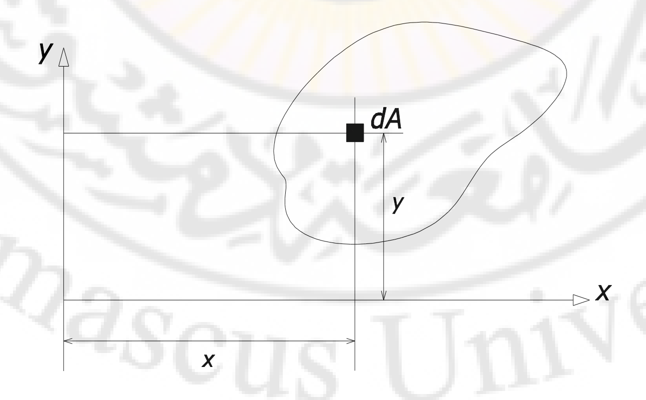
$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{h^2.(b+2a)}{6.\frac{(a+b).h}{2}}$$

$$= \frac{h}{3} . \frac{b+2.a}{a+b}$$

وهو ترتيب مركز ثقل المساحة المعتبرة .

3-6 عزم العطالة لمقطع (عزم القصور الذاتي) :

ويسمى أيضا" العزم الثاني لمساحة المقطع وكما يوحي الاسم فإن العزم الثاني لعنصر المساحة dA بالنسبة لأي محور حاصل ضرب مساحة العنصر ومربع المسافة بين مركزه والمحور الشكل (6-5) أي :



الشكل (6-5)

$$I_x = \int y^2 dA \qquad (9-6)$$
$$I_y = \int x^2 dA \qquad (10-6)$$

وبما أن عزم العطالة هو حاصل ضرب مساحة ومربع مسافة, وأن المساحة بطبيعتها كمية موجبة, كما أن مربع طول ذراع العزم كمية موجبة , فإن عزم العطالة يكون موجبا" دائما". وأبعاد عزم العطالة هي الطول مرفوعا" إلى الدرجة الرابعة, ووحداته الشائعة هي m^4, mm^4 في النظام الدولي للوحدات , و m^4, cm^4 في النظام المتري. وبالرغم من أنه ليس بالعسير حساب عزم العطالة لأي مساحة بإجراء التكامل في المعادلة (6-9) و(6-10) فإن على الطالب حفظ عزوم العطالة للمقاطع الشائعة المعطاة في الفقرة (6-8)

6- 4 جداء عزم العطالة

ويحسب هذا العزم حول محورين متعامدين واقعين في مستوى المساحة ويرمز له بالرمز **I** منتهيا" بحرفين يدلان على المحورين المفترضين , أي $I_{xy} = I_{yx}$ لأن كل منهما يعطي جداء عزم العطالة حول المحوريين x-x و y-y وتحسب القيمة كالتالي :

$$I_{xy} = \int (x).(y).dA = I_{yx} \qquad (11-6)$$

حيث :

x و y المسافة الكائنة ما بين المساحة الجزئية dA والمحاور الاحداثية x و y .

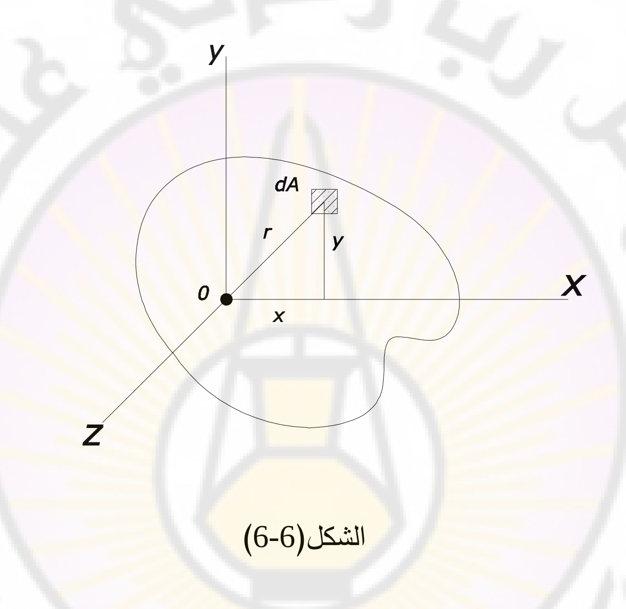
إن وحدة قياس جداء العطالة هي cm^4 أو m^4 وهو يختلف عن عزم العطالة المحوري من حيث القيمة فيمكن أن يكون موجباً أو سالباً .

اشارة جداء العطالة متعلقة باشارة الجداء x y فإذا كان المحوران المتعامدان يمثلان محوري تناظر للمقطع فعندئذ يكون جداء العطالة بالنسبة إلى هذين المحورين يساوي الصفر . وبالفعل من أجل الأشكال المتناظرة دائماً يمكن ايجاد عنصرين مساحتهما dA متساوية وتراتيبهما y لكنهما مختلفان باشارة فاصلتهما x , وعندما نجري عماية التكامل للجداء xydA لهذه العناصر نحصل على الصفر . ونسمي المحاور التي يكون جداء العطالة بالنسبة إليها مساوياً الصفر بالمحاور الرئيسية للمقطع .

5-6 عزم العطالة (القصور) القطبي

يسمى عزم العطالة لمساحة مقطع بالنسبة لمحور ويرمز له عادة بالحرف I_o. بالاشارة إلى الشكل (6-6) , عزم العطالة القطبي لعنصر المساحة dA بالنسبة للمحور z العمودي على مستوى المساحة والمار بالمركز 0 هو :

$$dI_O = r^2.dA = (\ x^2 + y^2\ )\ dA$$



الشكل(6-6)

بفك الطرف الأيمن من هذه المعادلة وإجراء التكامل على المساحة تكون النتيجة :

$$I_0 = \int x^2\ dA + \int y^2\ dA = I_x + I_y \qquad (12-6)$$

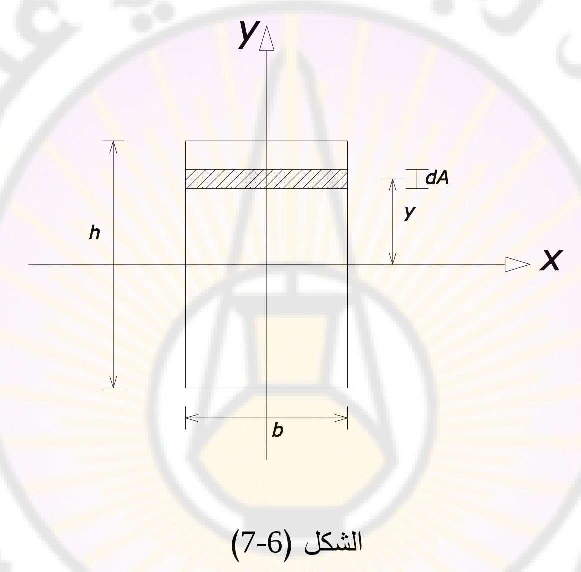
تبين المعادلة (6-12) عزم العطالة (القصور) القطبي لمساحة أي مقطع يساوي مجموع عزمي العطالة للمساحة بالنسبة لأي محورين متعامدين واقعين في مستويها ويتقاطعان عند المحور القطبي . وحيث إن I يمثل خاصة من الخواص الهندسية للمقاطع فهو مقدار ثابت لمقطع معين وبالتالي فإن مجموع عزمي العطالة لمساحة أي مقطع بالنسبة محورين متعامدين في مستويها مقدار ثابت . ويؤدي ذلك أنه إذا كان عزم العطالة بالنسبة لأحد هذين المحورين قيمة عظمى فلابد أن يكون عزم العطالة بالنسبة للمحور الآخر قيمة صغرى.

وكتطبيق للمعادلة (6-12) , عزم العطالة القطبي لمساحة مقطع دائري نصف قطره R هو :

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi.R^2}{4} + \frac{\pi.R^2}{4} = \frac{\pi.R^2}{2}$$

6-6 عزم العطالة للمقاطع البسيطة

لحساب عزم عطالة المستطيل بالنسبة للمحورين x , y الذين يمران من مركز ثقله c



الشكل (6-7)

لنأخذ شريحة رقيقة مساحتها dA التي تبعد عن المحور x بالمسافة y فيكون :

$$dA = b \,.\, dy$$

ويصبح عزم العطالة بالنسبة للمحور x :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} b.y^2 dy = b.\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b.h^3}{12}$$

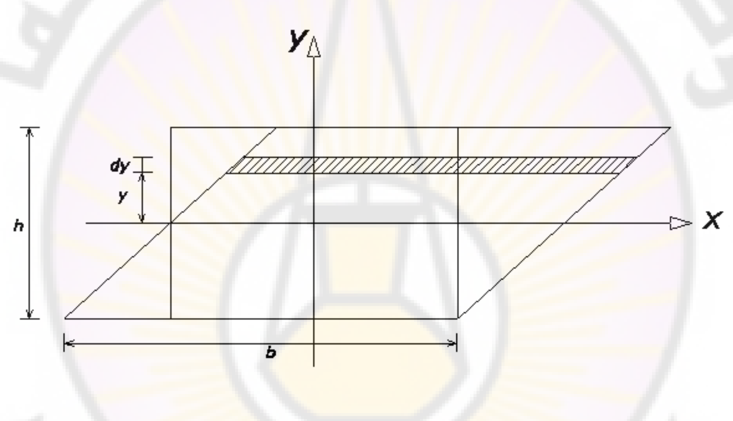
بطريقة مماثلة يمكن اعتبار المساحة العنصرية dA = h dx التي تبعد عن المحور y بالمسافة x وحساب عزم العطالة بالنسبة للمحور y كما يلي :

$$I_x = \int_A x^2\ dA = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx = \frac{hb^3}{12} \qquad (12-6)$$

إن العلاقة (6-12) يمكن تطبيقها من أجل حساب عزم عطالة متوازي الأضلاع المبين في الشكل (6-8) حيث إن متوازي الأضلاع يمكن أن ينتج من المستطيل المبين بخطوطه المنطقة وذلك بانسحاب مواز للمحور للمساحات العنصرية المبينة في الشكل (6-8) .

وبذلك تبقى مساحات العناصر وأبعادها كما هي في حالة المستطيل ويكون :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

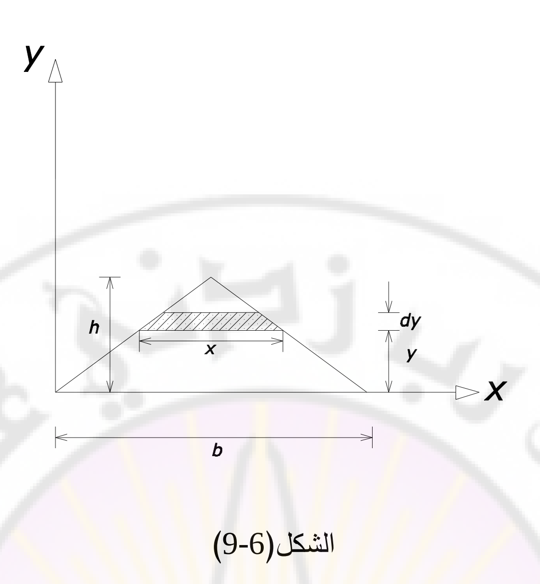


الشكل (6-8)

- لحساب عزم عطالة مثلث بالنسبة لقاعدتة الشكل (6-9) يمكن اعتبار مساحة عنصرية dA تبعد مسافة y عن القاعدة , فيكون :

$$dA = xdy$$

$$dA = \frac{b.(h-y)}{h}\, dy$$



الشكل(6-9)

ويكون عزم العطالة بالنسبة للقاعدة :

$$I_x = \int_0^h \frac{b.(h-y)}{h} y^2 dy = \frac{b}{h}\left\{\left[\frac{h.y^3}{3}\right]_0^h - \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h\right\}$$

$$= \frac{b.h^3}{12} - \frac{b.h^3}{14} = \frac{bh^3}{12}$$

- لحساب عزم عطالة قرص دائري الشكل(6-10) , نحدد أولا" عزم العطالة القطبي لمركز الدائرة .

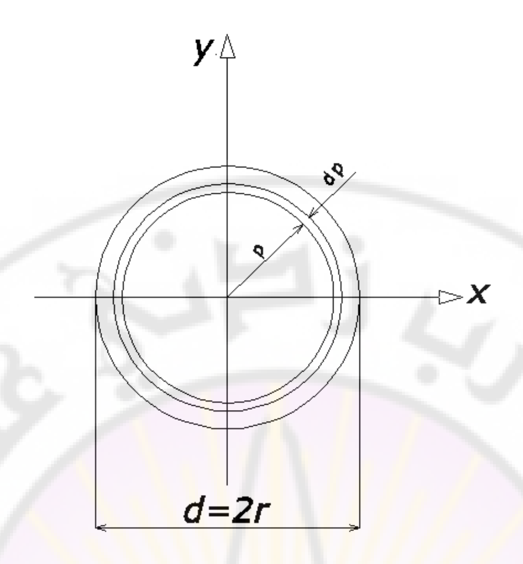
$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

وكجزء من المساحة dA نأخذ مساحة حلقية رقيقة للغاية ذات سماكة $d\rho$:

$$dA = 2\pi.\rho.d\rho$$

فعند ذلك : $I_\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho$

إذاً : $I_\rho = \frac{\pi.r^4}{2} = \frac{\pi.d^4}{32} \approx 0.1\, d^4$



الشكل (6-10)

ومن السهل إيجاد I_{x0} , فحسب الصيغة (6-12) وللدائرة لدينا :

$$I_\rho = 2.I_x = 2.I_y$$

ومن هنا :

$$I_X = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi.r^4}{4} = \frac{\pi.d^4}{64} \approx 0.05.d^4 \qquad (13-6)$$

أما بالنسبة لحساب عزوم عطالة الأشكال المركبة فيتم بتقسيم المساحة المعتبرة إلى عدد من الأجزاء :

$$I_X = I_X^{\mathrm{I}} + I_X^{\mathrm{II}} + I_X^{\mathrm{III}}$$

وهذا يستنتج مباشرة من خصائص التكامل المحدود :

$$\int_A y^2.dA = \int_{A1} y^2.dA + \int_{A2} y^2 dA + ...$$

حيث:

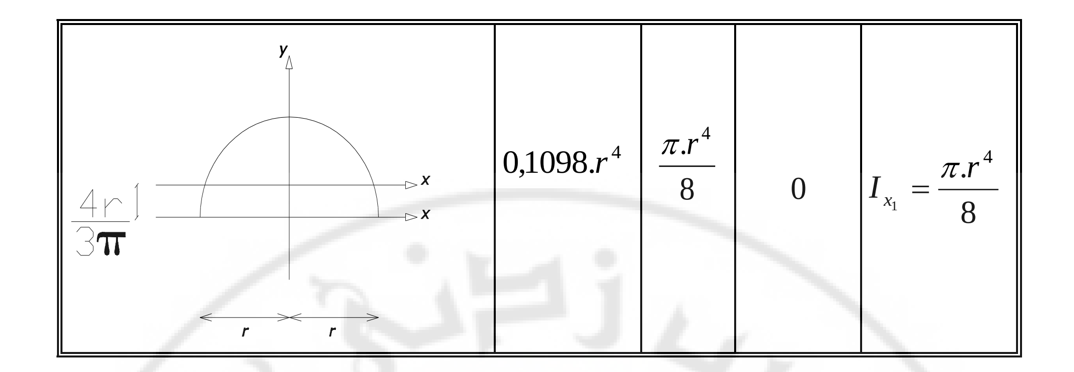
$$A = A_1 + A_2 + ...$$

وعلى هذا الأساس , فلحساب عزم العطالة للشكل المركب , يجب تقسيمه إلى عدة أشكال بسيطة , وبحساب عزم العطالة لهذه الأشكال وجمعها نحصل على العزم المطلوب .

ويبين الجدول (6-1) قيم عزوم العطالة و جداء العطالة لبعض الأشكال المستوية البسيطة وذلك بالنسبة لمحورين y,x مارين من مركز الثقل.

الجدول (6-1)

الشكل	I_x	I_y	I_{xy}	ملاحظات
	$\frac{b.h^3}{12}$	$\frac{h.b^3}{12}$	0	$I_{x_1} = \frac{b.h^3}{3}$ $I_{y_1} = \frac{h.b^3}{3}$
	$\frac{b.h^3}{36}$	$\frac{h.b^3}{36}$	$-\frac{b^2.h^2}{72}$	$I_{x_1} = \frac{b.h^3}{12}$ $I_{y_1} = \frac{h.b^3}{12}$
	$\frac{\pi.r^4}{4}$	$\frac{\pi.r^4}{4}$	0	–



	$0,1098.r^4$	$\frac{\pi.r^4}{8}$	0	$I_{x_1} = \frac{\pi.r^4}{8}$

7-6 عزم المقاومة ونصف قطر العطالة (القصور)

من الخواص الهندسية الأخرى للمقاطع العرضية اللازمة أثناء تصميم مقاطع العناصر الإنشائية وخاصة عند تعيين الاجهادات في حالة الانعطاف , هي عبارة عن عزم المقاومة ونصف قطر العطالة .

ويعرف عزم المقاومة لمقطع عرضي ما بالنسبة إلى محور ما أنه القيمة الناتجة عن تقسيم عزم العطالة على البعد الأعظم لأبعد نقطة من الشكل عن المحور أي :

$$W_X = \frac{I_x}{|x_{\max}|} \;,\; W_Y = \frac{I_y}{|x_{\max}|} \;,\; W_\rho = \frac{I_\rho}{R} \qquad (14-6)$$

حيث :

$W_X \;, W_Y$ – عزم المقاومة المحوري

W_ρ – عزم المقاومة القطبي لمقطع دائري نصف قطره R

وعلى سبيل المثال نجد أن عزم المقاومة لمستطيل الشكل (6-7) بالنسبة للمحور y يساوي :

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad , \quad x_{\max} = \frac{b}{2}$$

ومنه :

$$W_Y = \frac{h\,b^3}{12}\frac{2}{b} = \frac{hb^2}{6}$$

وبالطريقة نفسها نحسب عزم المقاومة بالنسبة إلى المحور x :

$$W_x = \frac{bh^3}{12}\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

لنحسب عزم المقاومة للدائرة الشكل (6-10) حيث :

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = I$$

نجد :

$$W_x = W_y = \frac{I}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

أما بالنسبة إلى نصف قطر عطالة مقطع ما لمحور ما يعطى بالعلاقة التالية :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad i_Y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (14-6)$$

حيث :

i_x – نصف قطر عطالة المقطع بالنسبة إلى المحور x

A– مساحة المقطع العرضي

i_y – نصف قطر عطالة المقطع بالنسبة إلى المحور y

فإذا كان المحوران x و y محورين رئيسيين فإننا نسمي عندئذ أنصاف أقطار العطالة بالنسبة إلى هذه المحاور بأنصاف الأقطار الرئيسية للعطالة

8-6 تغير عزوم العطالة عند دوران المحاور

$$I_{xy} = \int_A x.y.dA \quad , \quad I_Y = \int_A x^2 dA$$

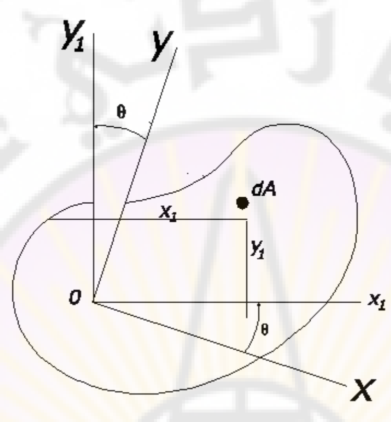
ليكن :

$$I_x = \int_A y^2.dA$$

عزوم وجداء عطالة المساحة A, بالنسبة للمحوريين الاحداثيين x,y الشكل (6-11).

لحساب الكميات المماثلة لها بالنسبة لجملة الاحداثيات x_1, y_1 التي تنتج عن الجملة الاولى x,y بدوران قدره θ يكون :

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 . dA$$
$$I_{y1} = \int_A x_1^2 . dA \qquad (15-6)$$
$$I_{x1y1} = \int_A x_1 . y_1 . dA$$



الشكل (6-11)

نكتب عن $x_1 \, , \, y_1$ بدلالة $x \, , \, y$ من العلاقتين الآتيتين :

$$x_1 = x.\cos\theta + y.\sin\theta$$
$$y_1 = y.\cos\theta - x.\sin\theta \qquad (16\text{-}6)$$

فيصبح :

$$I_{x1} = \int_A (y.\cos\theta - x.\sin\theta)^2 \, dA \qquad (17-6)$$

$$I_{x1} = \int_A y^2 .\cos\theta . dA + \int_A x^2 \sin^2\theta . dA - \int_A 2.x.y.\sin\theta.\cos\theta.dA$$

$$I_{x1} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2.I_{xy} \sin\theta.\cos\theta \qquad (18-6)$$

بالتعويض في العلاقة السابقة عن $\sin^2\theta \quad , \quad \cos^2\theta$ بقيمها التالية :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

نجد :

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}.\cos 2\theta - I_{xy}.\sin 2\theta \qquad (19-6)$$

بطريقة مماثلة يمكن حساب I_{y_1} من العلاقة :

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{-I_x + I_y}{2}.\cos 2\theta + I_{xy}.\sin 2\theta \qquad (20-6)$$

بجمع I_{x_1} مع I_{y_1} نحصل على :

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$$

أي أن مجموع عزمي العطالة بالنسبة لمحورين متعامدين يمران من نفس النقطة هو مقدار ثابت وهو عبارة عن عزم العطالة القطبي بالنسبة لهذه النقطة أما جداء العطالة $I_{x_1y_1}$ بالنسبة للمحاور الجديدة فيكون :

$$I_{x_1y_1} = \int_A x_1.y_1.dA = \int_A (x.\cos\theta + y.\sin\theta)(y.\cos\theta - x.\sin\theta)\, dA$$

$$= \int_A x.y.\cos^2\theta.dA - \int_A x^2.\sin\theta\cos\theta.dA \int_A y^2 si.n\theta\cos\theta.dA$$

$$- \int_A y.x.\sin^2\theta.dA$$

وبالتالي :

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (21-6)$$

أو :

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (22-6)$$

فمن أجل $\theta = 0$ يكون $I_{x_1y_1} = I_{XY}$

ومن أجل $\theta = 90$ يكون $I_{X_1Y_1} = -I_{xy}$

ولما كان جداء العطالة يتغير بتغير زاوية الدوران θ فهناك اتجاه ما للمحاور يكون من أجله جداء العطالة معدوما" . إن هذين المحورين يسميان بالمحورين الأساسيين " الرئيسيين"

للعطالـة وإذا كـان مركز إحداثيات هذين المحورين يمر من مركز ثقل المقطع , سميت هذه المحاور بالمحاور الأساسية المركزية .

لقد رأينا أن جداء العطالـة ينعدم بالنسبة لمحورين إحداثين يكون أحدهما محوراً مناظراً للسطح المعتبر , وبالتالي فإن محور التناظر والمحاور المتعامدة عليه يكونان محورين أساسيين للعطالة

9-6 المحاور وعزوم العطالة الرئيسية

مـن المعـادلات $(6-19),(6-20),(6-22)$ نلاحـظ أن عـزوم العطالـة $I_{x_1}\ ,I_{y_1}\ ,I_{x_1y_1}$ تتغير قيمتها بتغير زاوية دوران المحاور θ .

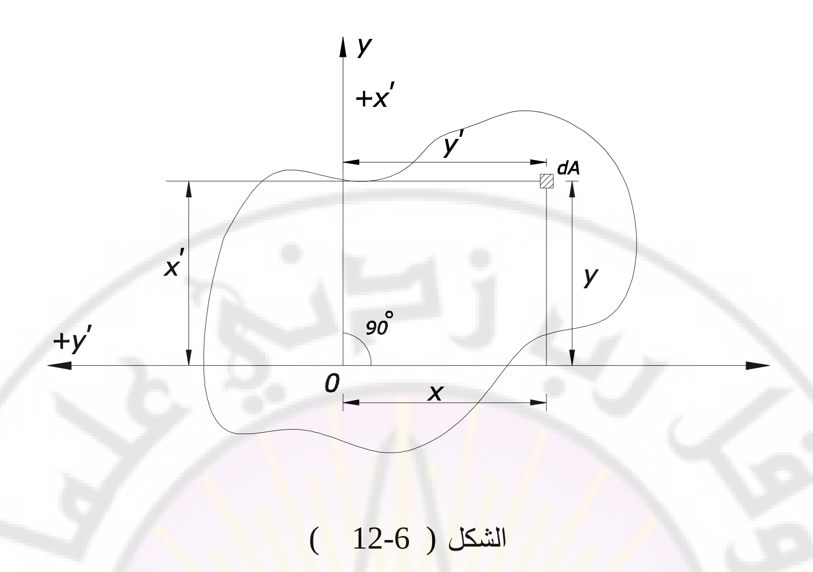
لنبرهن الآن أنه عندما تدور المحاور الإحداثية بزاوية $\alpha = 90$ فإن جداء العطالة تتغير إشارته بالشكل معاكس . لنفرض على سبيل المثال أن المحاور الاحداثيـة x و y للمقطـع المبين في الشكل (6-12) قد دارت بزاوية $\alpha = 90$ بعكس دوران عقارب الساعة وأخذت الوضـع x', y' فالإحداثيات الجديدة لمساحة الجزئية dA بدلالة الاحداثيات القديمة تكون :

$$x' = y$$
$$y' = -x$$

جداء العطالة بالنسبة إلى المحاور الجديدة x', y' يعين بالعلاقة التالية :

$$I_{X_1Y_1} = \int_A x'y'dA = -\int_A xy\ dA = -I_{XY}$$

ويمكن الحصول على النتيجـة السابقة نفسها إذا وضعنا في العلاقة (6-22) الزاويـة $\theta = 90$ بدل الزاوية θ .

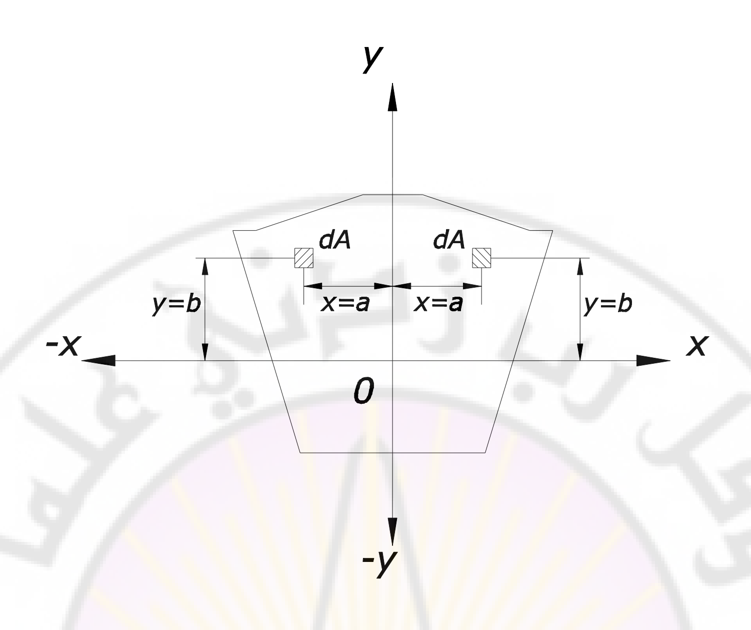


الشكل (6-12)

من الملاحظ أن قيمة جداء العطالة تتغير باستمرار وذلك نتيجة تغير زاوية دوران المحاور الإحداثية , فعندما تكون زاوية الدوران 90^0 نجد أن قيمة جداء العطالة تتغير باشارة معاكسة ولهذا عند تحول هذه القيمة من اشارة ما (موجبة أو سالبة) إلى اشارة أخرى معاكسة كان لابد من وجود وضعية محددة للمحاور الاحداثية (زاوية دوران معينة) ومن أجلها تكون قيمة جداء العطالة تساوي الصفر .

والمحاور الاحداثية التي بالنسبة إليها يكون جداء العطالة مساوياً للصفر تسمى محاور العطالة الرئيسية , وإذا كان مبدأ هذه المحاور منطبقاً على مركز ثقل المقطع فعندئذ تسمى محاور العطالة المركزية الرئيسية .

إذا كان أحد المحورين هو محور تناظر للمقطع العرضي فإن هذا المحور دائماً يكون أحد المحاور الرئيسية .
نفرض أن المحور y هو محور تناظر للمقطع المبين في الشكل (6-13) .



الشكل(6-13)

لنأخذ مساحة جزئية dA احداثياتها y = b و x = a ولنحسب جداء العطالة لهذه المساحة الجزئية :

$$dI_{xy} = a\,b\,dA$$

إن إحداثيات المساحة الجزئية dA المأخوذة في الجهة الثانية لمحور التناظر هي x = - a و y = b وجداء العطالة يكون :

$$dI'_{xy} = -\,a\,b\,dA$$

نجمع جدائي العطالة للمساحة الجزئيةdA بالنسبة إلى المحور y فنجد :

$$dI_{xy} + dI'_{xy} = 0 \qquad (23-6)$$

من العلاقة (6-23) نرى أن جداء العطالة لكامل المقطع العرضي بالنسبة إلى محور التناظر y هو محور رئيسي وأي محور آخر عليه يعتبر محوراً رئيسياً .

لندرس الآن تعيين موقع المحاور الرئيسية للأشكال التي لاتحوي محاور متناظرة . نفرض أن عزوم العطالة I_x, I_y, I_{xy} بالنسبة إلى المحاور معلومة ولنحسب جداء العطالة بالنسبة إلى محاور جديدة x_1, y_1 الناتجة عن دوران المحاور x و y بزاوية α :

$$I_{X_1Y_1} = \frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\theta + I_{XY} \cos 2\theta$$

نعتبـر أن جـداء العطالـة $I_{X_1Y_1}$ يسـاوي الصـفر,لنحسـب الزاويـة α اللازمـة لتـدوير المحـاور الاحداثية للحصول على محاور إحداثية جديدة رئيسية .

$$\frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\theta + I_{XY} \cos 2\theta = 0$$

ومنه :

$$tg\ 2\theta = \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X} \qquad (24-6)$$

من المعادلة (6-24) نحصل على قيمتين للزاوية θ حيث مجموعهما يساوي 180^0 , من أجل الزاويـة θ نـرى أن هنـاك قيمتـين مجموعهمـا يسـاوي 90^O وبنـاء علـى هـذا نجـد أن المحـاور الرئيسية تكون متعامدة فيما بينها .

إن عـزوم العطالـة I_{Xx_1}, I_{y_1} تتغيـر بتغيـر زاويـة دوران المحـاور الاحداثيـة θ فمـن أجـل قيمـة معينة للزاوية θ تكون I_{x_1} أعظمية أما قيمة I_{y_1} أصغرية وجداء العطالة $I_{x_1y_1}$ يساوي الصفر فعندئـذ نسـمي المحـورين $x_1\, y_1$ بـالمحورين الرئيسـين وعـزوم العطالـة I_{x_1}, I_{y_1} بعـزوم العطالـة الرئيسية .

للحصول على القيمة العظمى أو الصغرى لعزم العطالة الرئيسية ، نأخذ أحد التابعين I_{x_1} أو I_y ونشتقه بالنسبة إلى المتحول θ ونعدم ناتج المشتق :

$$I_{x_1} = I_X \cos^2\theta + I_Y \sin^2\theta - I_{XY} \sin 2\theta$$

$$\frac{\delta I_{x_1}}{\delta\theta} = -2 I_X \cos\theta \sin\varpi + 2 I_Y \sin\theta \cos\theta - 2I_{XY} \cos 2\theta = 0$$

أو :

$$(I_Y - I_X)\sin 2\theta = 2I_{XY} \cos 2\theta$$

ومنه :

$$tg\ 2\theta = \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}$$

بعـد معرفـة قيمـة الزاويـة θ نكـون قـد حـددنا موقـع المحـاور الرئيسـية ولحسـاب عـزوم العطالـة الرئيسية كان لابد من حساب قيم $\sin 2\alpha\theta, \cos 2\theta$ من الجداول أو بالشكل التحليلي :

$$\cos 2\phi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\theta}} = \pm\frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2}}$$

$$\sin 2\theta = tg\,2\theta.\cos 2\alpha\theta = \pm\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1\pm\frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}})$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1\pm\frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}})$$

نعوض هذه القيم في العلاقات (6-18) و (6-19) السابقة وبعد اجراء بعض العمليات الجبرية وحذف الزاوية نجد :

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{(\frac{I_{x-}I_y}{2})^2 + I_{xy}^2} \qquad (25-6)$$

$$I_{mhn} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{(\frac{I_{x-}I_y}{2})^2 + I_{xy}^2} \qquad (26-6)$$

نرمز بـ $I_{\max}$, $I_{\min}$ إلى عزمي العطالة الرئيسيين والمحددين بالنسبة إلى المحورين الرئيسيين المارين من مركز ثقل المقطع العرضي .

إذا علمت قيم عزوم العطالة بالنسبة إلى المحاور الرئيسية x_1 , y_1 فإن حساب عزوم العطالة ممكن بالنسبة إلى محاور جديدة x و y الناتجة عن دوران المحاور x_1 , y_1 وذلك باستخدام المعادلات $(18-6),(19-6),(22-6)$ نجد :

$$I_x = I_{x_1}\cos^2\theta + I_{y_1}\sin^2\theta \qquad (27-6)$$

$$I_x = I_{y_1}\cos^2\theta + I_{x_1}\sin^2\theta \qquad (28-6)$$

$$I_{xy} = \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2}\sin 2\theta \qquad (29-6)$$

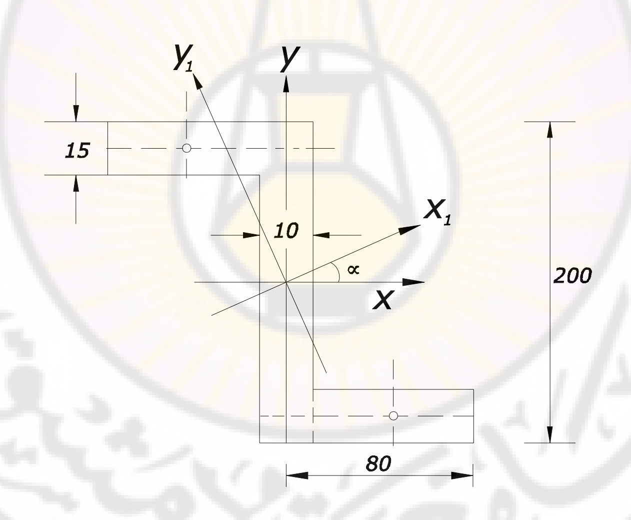
نلاحظ أن هذه المعادلات هي المعادلات نفسها (6-19) و (6-20) و (6-22) وذلك بعد اعتبار أن جداء العطالة بالنسبة للمحاور الرئيسية x_1, y_1 يساوي الصفر ($I_{X_1Y_1} = 0$)

مثال (5-2)

أوجد مكان المحاور المركزية الرئيسية للعطالة واحسب قيم عزوم العطالة الرئيسية للمقطع المبين بالشكل (6-14)

الحل :

نعين في البداية عزوم العطالة $I_X \; , I_Y \; , I_{XY}$ بالنسبة إلى المحاور x و y ومن أجل هذا نقسم المقطع إلى مستطيل شاقولي I ومستطيلين أفقيين II كما هو مبين بالشكل (6-14)



الشكل (6-14)

عزوم العطالة للمستطيل الشاقولي I بالنسبة إلى المحاور x و y

$$I'_X = \frac{1.20^3}{12} = 667 \; cm^4$$

$$I'_y = \frac{20.1^3}{12} = 1{,}66 \; cm^4$$

عزوم العطالة للمستطيل الأفقي II :

$$I''_X = \frac{(8-1).1{,}5^3}{12} + (8-1).1{,}5\,(\frac{20}{2} - \frac{1{,}5}{2})^2 = 900\ cm^4$$

$$I''_y = \frac{.1{,}5.(8-1)^3}{12} + (8-1).1{,}5\,(\frac{8-1}{2} + \frac{1}{2})^2 = 198\ cm^4$$

عزوم العطالة لكامل المقطع :

$$I_X = I'_X + 2I''_X = 667 + 2.900 = 2467\ cm^4$$

$$I_y = I'_y + 2I''_y = 1{,}66 + 2.198 = 398\ cm^4$$

إن جداء العطالة للمستطيل الشاقولي I بالنسبة إلى المحورين x و y يساوي الصفر لأن هذه المحاور بالنسبة إليه تعتبر محاور رئيسية .

نعين جداء العطالة للمستطيلين الأفقيين II فنجد أن جداء عطالتهما بالنسبة إلى محوري تناظرهما الموضحين في الشكل يساوي الصفر . وبالتالي نرى أن جداء عطالتهما بالنسبة إلى المحورين x و y يعينان بالمعادلة (2-17) :

فمن أجل المستطيل II العلوي :

$$I'_{XY} = (8-1).1{,}5\left[-(\frac{8-1}{2} + \frac{1}{2})\right].9{,}25 = -388\ cm^2$$

من أجل المستطيل II السفلي :

$$I''_{XY} = (8-1).1{,}5\,(\frac{8-1}{2} + \frac{1}{2})\left[-(\frac{20}{2} - \frac{1{,}5}{2})\right] = -388\ cm^2$$

جداء العطالة للمقطع الكلي :

$$I_{XY} = I'_{XY} + I''_{XY} = -388 + (-388) = -766\ cm^4$$

مكان المحاور المركزية الرئيسية للعطالة تعين بالعلاقة (2-30) :

$$tg\,2\alpha = \frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y} = \frac{-2(766)}{398-1467} = 0.75$$

ومنه :

$$2\alpha = 36^0,52 \quad ; \quad \alpha = 18^0,26$$
$$2\alpha = 216^0,52 \quad ; \quad \alpha = 108^0,26$$

وبالتالي نرى أن :

$$\sin 2\alpha = \pm 0,6 \quad , \quad \cos 2\alpha = \pm 0,8$$

ولكن باستخدام المعادلتين (2-20) و (2-21) ينتج :

$$I_{X_1} + I_{Y_1} = I_X + I_Y = 398 + 2476 = 2865 \ cm^4$$
$$I_{X_1} - I_{Y_1} = (I_X - I_Y)\cos 2\alpha - 2I_{XY}\sin 2\alpha$$
$$= (2467 - 398)(\pm 0,8) - 2(-770)(\pm 0,6)$$

أو :

$$I_{X_1} + I_{Y_1} = 2865 \ cm^4$$
$$I_{X_1} - I_{Y_1} = \pm 2585 \ cm^4$$

وبحل هاتين العلاقتين مع أخذ الإشارة الموجبة في المعادلة الثانية نجد :

$$I_{X_1} = 2725 \, cm^4 \quad , \quad I_{Y_1} = 140 \, cm^4$$

وبهذا نرى أن عزم العطالة I_{X_1} أعظمي و I_{Y_1} أصغري .

أما إذا أخذنا الاشارة السالبة في المعادلة الثانية فإن الناتج عندئذ $I_{X_1} = 2725 \, cm^4 \quad , \quad I_{Y_1} = 140 \, cm^4$ ولكن يجب تدوير المحاور x_1 و y_1 بزاوية 90^0بانسبة إلى المحاور x_1 و y_1 الموضحة في الشكل (2-21)

الملحـــــق

يتضمن الملحق :

- الحروف الهجائية الإغريقية .
- بادئات النظام الدولي للوحدات
- رموز وحدات القياس في الجملتين المكثية والعالمية
- العلاقة بين النظام المتري والدولي
- الخواص الهندسية لبعض المقاطع المستوية
- دليل المصطلحات العلمية
- المراجع العلمية العربية والأجنبية .

الحروف الهجائية الإغريقية

اللفظ	أحرف صغيرة	أحرف كبيرة
ألفا	α	A
بيتا	β	B
جاما	y	Γ
ديلتا	δ	Δ
ايبسيلون	ε	E
زيتا	ξ	Z
ايتا	η	H
ثيتا	θ	Θ
يوتا	t	I
كايا	k	K
لامدا	ג	Λ
ميو	μ	M
نيو	v	N
كساي	ζ	Ξ
اميكرون	o	O
بي	π	Π
رو	ρ	p
سيجما	σ	Σ
تاو	τ	T
ابسيلون	ט	Y
في	φ	Φ
خي	χ	X
بسي	ψ	Ψ
أوميغا	ω	Ω

بادئات النظام الدولي للوحدات

Prefixes of SI Units:

الأجزاء			المضاعفات		
القيمة	الرمز	الاسم	القيمة	الرمز	الاسم
10^{-18}	a	أتو atto	10^{18}	E	إكزا exa
10^{-15}	F	فمتو femto	10^{15}	P	بيتا Peta
10^{-12}	P	بيكو pico	10^{12}	T	تيرا tera
10^{-9}	N	نانو nano	10^{9}	G	جيغا gega
10^{-6}	µ	مكرو micro	10^{6}	M	ميغا mega
10^{-3}	m	ميلي mili	10^{3}	K	كيلو Kilo
10^{-2}	C	سنتي centi	10^{2}	h	هيكتو hecto
10^{-1}	d	دسي deci	10	da	داكا deka

رموز وحدات القياس في الجملتين المكثية والعالمية

Pascal	Pa	باسكال
Mega Pascal	MPa	ميغا باسكال
Meter	m	متر
Millimeter	mm	ميلي متر
Centimeter	cm	سنتي متر
Kilo Newton	KN	كيلو نيوتن
Newton	N	نيوتن
Kilogram force	Kgf	كيلو غرام ثقلي
Ton	t	طن
Joule	J	جول

العلاقة بين وحدات النظام المتري والنظام الدولي

الكمية	وحدات النظام الدولي		وحدات النظام المتري		عامل التحويل	
	الاسم	الرمز	الاسم	الرمز	الى النظام المتري	الى النظام الدولي
الطول	المتر	m	المتر	m	1 m=1 m	1 m=1 m
	الميليمتر	mm	السنتيمتر	cm	1mm=0.1cm	1cm=10mm
الكتلة	الكيلو غرام	Kg	الكيلو غرام	Kg	1 Kg=1 Kg	1 Kg=1 Kg
الزمن	الثانية	S	الثانية	S	1 S=1 S	1 S=1 S

درجة الحرارة	درجة سيلسيوس	C^0	درجة مئوية	C^0	$1\ C^0=1\ C^0$	$1\ C^0=1\ C^0$
القوة	النيوتن	N	كيلوغرام قوة	Kgf	1N=0.102 Kg	1Kgf=9.81N
	الكيلو نيوتن	KN	طن قوة	tf	1Kn=0.102 tf	1tf=9.81 KN

العلاقة بين وحدات النظام المتري والنظام الدولي

الكمية	وحدات النظام الدولي		وحدات النظام المتري		عامل التحويل	
	الاسم	الرمز	الاسم	الرمز	الى النظام المتري	الى النظام الدولي
عزوم الانحناء	نيوتن.متر	N.m	كيلوغرام قوة. سنتيمتر	Kgf.cm	1 KN=10.2 N.m	1 Kgf.cm=0.098 N.m
	كيلو نيوتن.متر	KN.m	كيلوغرام قوة. متر	Kgf.m	1 KN.m=102 Kgf.m	1Kgf.m=9.812 $x10^3$KN.m
	ميغا نيوتن.متر	MN. m	طن قوة. متر	Tf.m	1MN.m=102 tf.m	1 tf.m=9.81$x10^3$ KN.m
الإجهاد	الباسكال N/m^2	Pa	طن قوة للمتر المربع	Tf/m^2	1 KPa=0.102 tf/m^2	1 Kgf/cm^2=0.098 MPa
	الكيلو باسكال	KPa	كيلوغرام قوة للسنتيمتر مربع	Kgf/cm^2	1 MPa=10.2 Kgf/cm^2	1 Kgf/cm^2=0.098 MPa
	الميغا باسكال N/mm^2	MPa	الضغط الجوي النظامي	atm	1 MPa=10.2 atm	1 atm=0.098 MPa

المميزات الهندسية لبعض المقاطع المستوية

PROPERTIES

OF

PLANE AREAS

Notation:

A= area

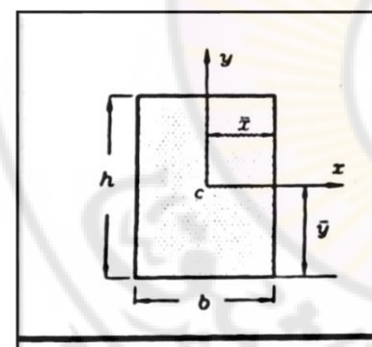
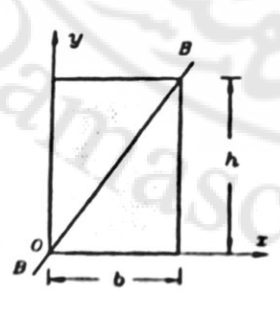
$\dot{x}$, $\bar{y}$ = distances to centroid C.

I_x, I_y = moments of inertia with respect to the x and y axes.

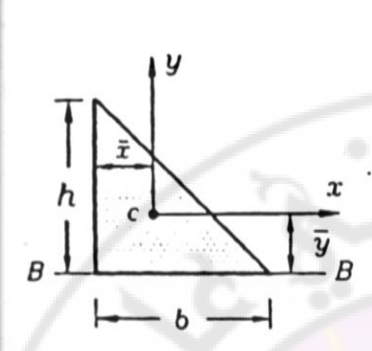
I_{xy} = product of inertia with respect to the x and y axes.

$I_p = I_x + I_y$ = polar moment of inertia.

I_{pp}= moment of inertia with respect to axis B−B.

	**(1)Rectangle(Origin of axes centroid)** $A = b.h$ $\quad \bar{x} = \frac{b}{2}$ $\quad \bar{y} = \frac{h}{2}$ $I_x = \frac{b.\,h^3}{12}$ $\quad I_y = \frac{b.\,h^3}{12}$ $\quad I_{xy} = 0$ $I_{xy} = \frac{b.\,h}{12}(h^2 + b^2$
	**(2) Rectangle(Origin of axes at corner)** $I_x = \frac{b.\,h^3}{3}$ $\quad I_y = \frac{h.\,b^3}{3}$ $I_{xy} = \frac{b^2.\,h^2}{4}$ $I_p = \frac{b.h}{3}(h^2 + b^2)$ $\quad I_{pp} = \frac{b^3.\,h^3}{6.(b^2 + h^2)}$

(6) Right triangle (Origin of axes at centroid)



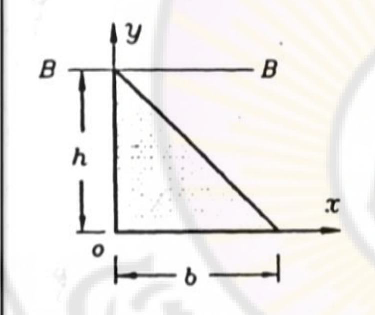
$$I_x = \frac{b.h^3}{36} \qquad I_y = \frac{h.b^3}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2.h^2}{72}$$

$$A = \frac{b.h}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_p = \frac{b.h}{36}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{b.h^3}{12}$$

(7) Right triangle (Origin of axes at vertex)

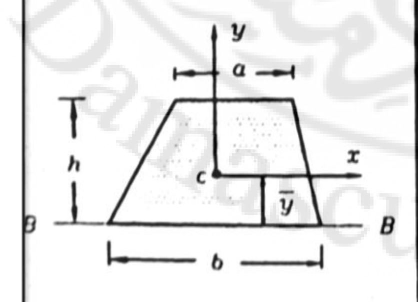


$$I_x = \frac{b.h^3}{12} \qquad I_y = \frac{h.b^3}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2.h^2}{24}$$

$$I_p = \frac{b.h}{12}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{b.h^3}{4}$$

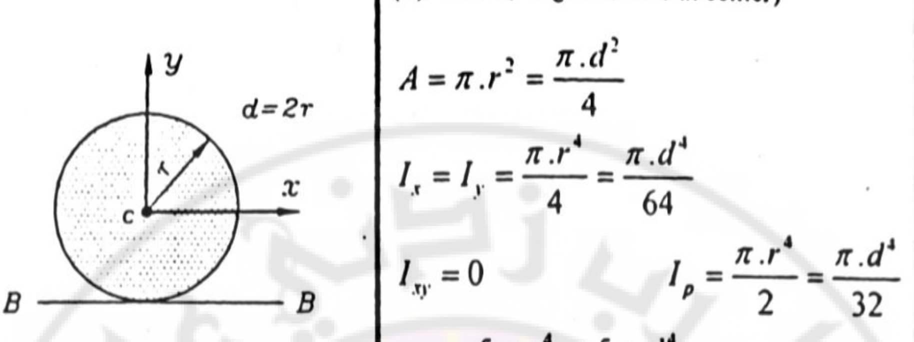
(8) Trapezoid (Origin of axes at centroid)



$$A = \frac{h.(a+b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h.(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3.(a^2 + 4a.b + b^2)}{36.(a+b)}$$

$$I_{HB} = \frac{h^3.(3a+b)}{12}$$



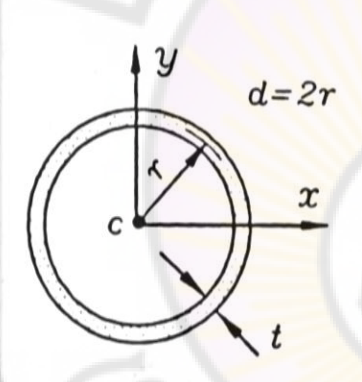
(9) Circle (Origin of axes at center)

$$A = \pi . r^2 = \frac{\pi . d^2}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi . r^4}{4} = \frac{\pi . d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_p = \frac{\pi . r^4}{2} = \frac{\pi . d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi . r^4}{4} = \frac{5\pi . d^4}{64}$$



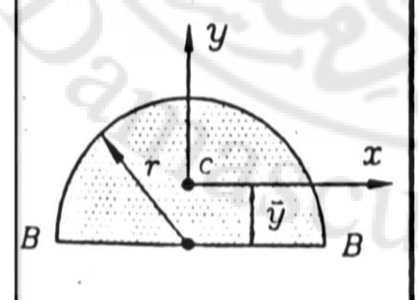
(10) Circular ring (Origin of axes at center)
Approximate formulas for case when t is small

$$A = 2\pi . r . t = \pi . d . t$$

$$I_x = I_y = \pi . r^3 . t = \frac{\pi . d^3 . t}{8}$$

$$I_{xy} = o$$

$$I_p = 2\pi . r^3 . t = \frac{\pi . d^3 . t}{4}$$



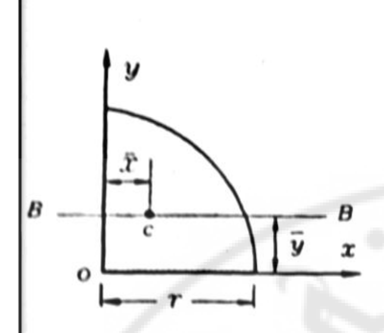
(11) Semicircle (Origin of axes at centroid)

$$A = \frac{\pi . r^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{4 . r}{3 . \pi}$$

$$I_{xy} = \frac{(9\pi^2 - 64) . r^4}{72 . \pi} \approx 0.1098 r^4$$

$$I_y = \frac{\pi . r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

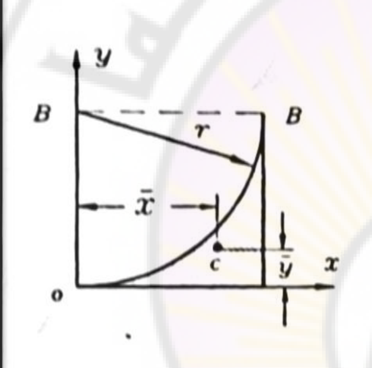


(12) Quarter circle (Origin of axes at center of circle)

$$A = \frac{\pi . r^2}{4} \qquad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3.\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi . r^4}{16} \qquad I_{xy} = \frac{r^4}{8}$$

$$I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144.\pi} \approx 0.05488r^4$$



(13) Quarter –circular spandrel (Origin of axes at vertex)

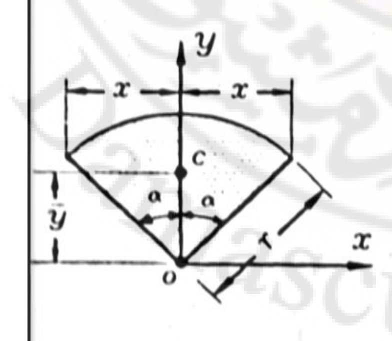
$$A = (1 - \frac{\pi}{4})r^2$$

$$\bar{x} = \frac{2r}{3.(4-\pi)} \approx 0.7766r$$

$$\bar{y} = \frac{(10 - 3\pi)r}{3.(4-\pi)} \approx 0.2234r$$

$$I_x = (1 - \frac{5\pi}{16})r^4 \approx 0.01825r^4$$

$$I_y = I_{BB} = (\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6})r^4 \approx 0.1370r^4$$



(14) Circular sector (Origin of axes at center of circle)

α = angle in radians $\qquad (\alpha \le \frac{\pi}{2})$

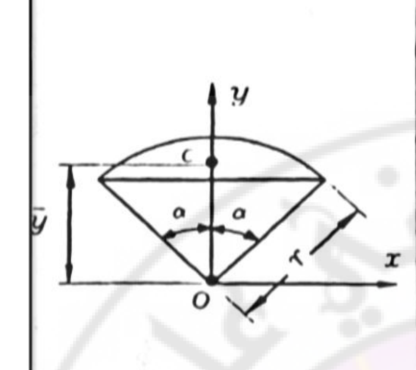
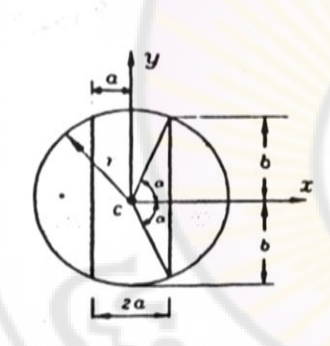
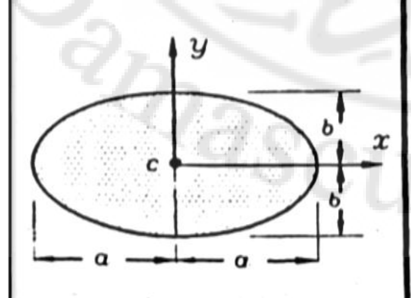
$$A = \alpha . r^2 \qquad \bar{x} = r.\sin\alpha$$

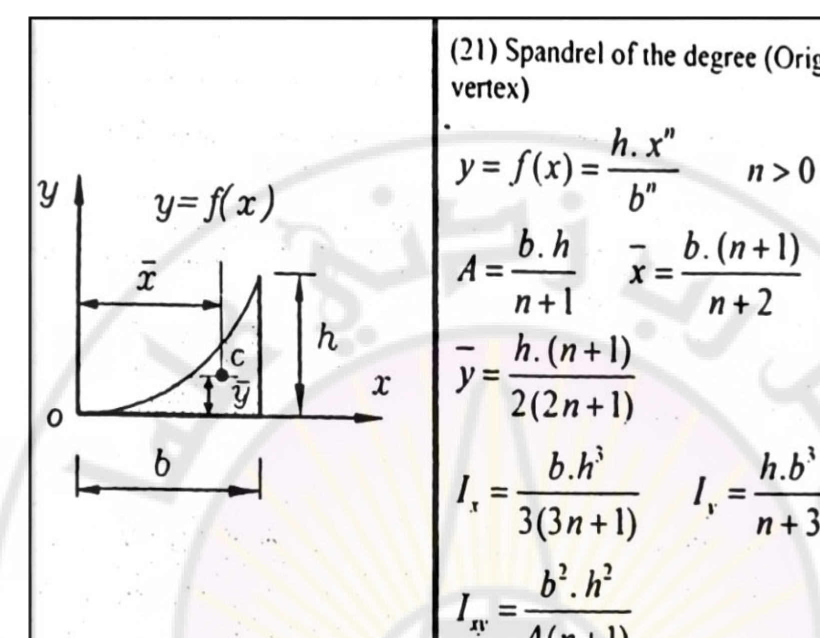
$$\bar{y} = \frac{2r.\sin\alpha}{3.\alpha}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \sin\alpha . \cos\alpha)$$

$$I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_Y = \frac{\alpha . r^4}{2}$$

	(15) Circular segment (Origin of axes at center of circle) α = angle in radians $(\alpha \le \frac{\pi}{2})$ $A = r^2(\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha)$ $\bar{y} = \frac{2r}{3}(\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha})$ $I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha + 2\sin^3\alpha.\cos\alpha)$ $I_{xy} = 0$ $I_y = \frac{r^4}{12}(3\alpha - 3\sin\alpha.\cos\alpha - 2\sin^3\alpha.\cos\alpha)$
	(16) Circle with core removed (Origin of axes at center of circle) α = angle in radians $(\alpha \le \frac{\pi}{2})$ $\alpha = \arccos\frac{a}{r}$ $b = \sqrt{r^2 - a^2}$ $A = 2.r^2(\alpha - \frac{a.b}{r^2})$ $I_{xy} = 0$ $I_x = \frac{r^4}{6}(3\alpha - \frac{a.b}{r^2} - \frac{2.a.b^3}{r^4})$ $I_y = \frac{r^4}{6}(\alpha - \frac{a.b}{r^2} + \frac{2a.b^3}{r^4})$
	(17) Ellipse (Origin of axes at centroid) $A = \pi.a.b$ $I_x = \frac{\pi.a.b^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi.b.a^3}{4}$ $I_{xy} = 0$ $I_p = \frac{\pi.a.b}{4}(b^2 + a^2)$ Circumference $\approx \pi[1.5(a+b) - \sqrt{a.b}]$



(21) Spandrel of the degree (Origin of axes at vertex)

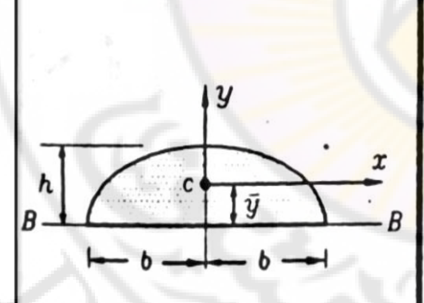
$$y = f(x) = \frac{h.x^n}{b^n} \qquad n > 0$$

$$A = \frac{b.h}{n+1} \qquad \bar{x} = \frac{b.(n+1)}{n+2}$$

$$\bar{y} = \frac{h.(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$I_x = \frac{b.h^3}{3(3n+1)} \qquad I_y = \frac{h.b^3}{n+3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2.h^2}{4(n+1)}$$



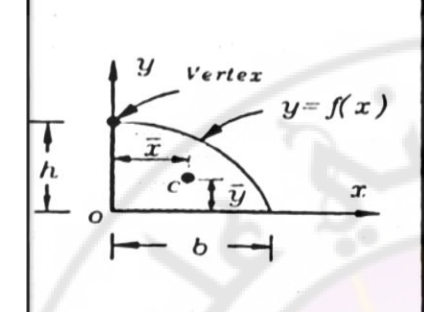
(22) Sine wave (Origin of axes at centroid)

$$A = \frac{4b.h}{\pi} \qquad \bar{y} = \frac{\pi.h}{8}$$

$$I_x = (\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16})bh^3 \approx 0.08659bh^3$$

$$I_y = (\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3})b.h^3 \approx 0.2412h.0\,b^3$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{8b.h^3}{9\pi}$$



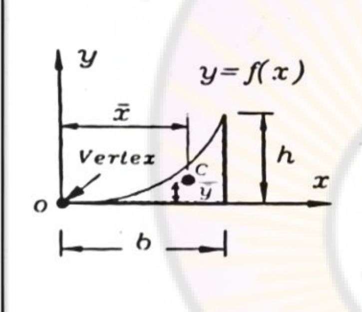
(18) Parabolic semi segment (Origin of axes at corner)

$$y = f(x) = h.(1 - \frac{x^2}{b^2})$$

$$A = \frac{2.b.h}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

$$I_x = \frac{16b.h^3}{105} \qquad I_y = \frac{2h.b^3}{15}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2.h^2}{12}$$



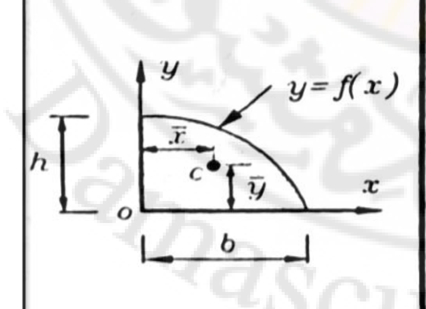
(19) Parabolic spandrel (Origin of axes at vertex)

$$y = f(x) = \frac{h.x^2}{b^2}$$

$$A = \frac{b.h}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3.b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3.h}{10}$$

$$I_x = \frac{b.h^3}{21} \qquad I_y = \frac{h.b^3}{5}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2.h^2}{12}$$



(20) Semi segment of nth degree (Origin of axes at corner)

$$y = f(x) = h.(1 - \frac{x^n}{b^n}) \qquad n > 0$$

$$A = b.h(\frac{n}{n+1}) \qquad \bar{x} = \frac{b.(n+1)}{2.(n+1)}$$

$$\bar{y} = \frac{h.n}{2n+1}$$

$$I_x = \frac{2.b.h^3.n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)}$$

$$I_y = \frac{h.b^3.n}{3(n+3)} \qquad I_{xy} = \frac{b^2.h^2.n^2}{4(n+1)(n+2)}$$

دليل المصطلحات العلمية

عربي – إنكليزي

-A-

Alternating	متناوب – متبدل
Annealing	تخمير – تقسية
Axial force	قوة محورية
Axle	محور
Axle – Shaft	محور نقل الحركة

-B-

Balance	توازن
Bars	قضبان
Beam	جائز
Behavior	سلوك
Bend to	ينعطف – ينحي
Bending moment	عزم الانعطاف

Body force	قوة حجمية أو جسمية

-C-

Cantilever	ظفر
Cast iron	حديد صب
Castiglione's theorem	نظرية كاستيليانو
Combined Bending	انعطاف مركب
Compression	انضغاط
Compression test	تجربة الضغط
Continuous beams	الجوائز المستمرة
Cross Section	مقطع عرضي

-D-

Deflection	تغير – تشوه
Deformable body	الجسم القابل للتغير
Degree	درجة

Degree of Statically	درجة عدم التقرير
Displacement	انتقال

-E-

Elastic Curve	الخط المرن
Elastic domain	مجال المرونة
Elasticity	المرونة
Energy	طاقة

-F-

Fiber	ليف
Fixed support	مسند موثوق
Force	قوة
Frame	إطار – هيكل

-H-

Hinge	مفصل
Hook s Law	قانون هوك

Homogeneous	تجانس

-I-

Isotropic	تشابه الخواص في كافة الاتجاهات

-L-

Law of Superposition	قانون تنضد الأثار
Loading	تحميل
Longitudinal strain	الانفعال الطولي

-M-

Material	مادة
Modules of elasticity	عامل المرونة
Mohr s circle	دائرة مور
Moment	عزم

-N-

Normal Stress	إجهاد ناظمي

-O-

Oblique bending	انعطاف مائل

-P-

Principal axes	محاور أساسية
Principal stresses	إجهادات أساسية
Proportional limit	حد التناسب

-R-

Reaction	رد فعل
Resistance	مقاومة
Rolling support	مسند منزلق

-S-

Shear	قص
Simple Bending	انعطاف بسيط
Steel	فولاذ
Strain	انفعال

Surface force	إجهاد
Surface force	قوة سطحية

-T-

Theory of elasticity	نظرية المرونة
Thin walled bars	قضبان رقيقة المرونة

اللجنة العلمية

أ. د ابراهيم الجراد

د. م شاهين غلاييني

د. م ميرنا سعود

المدقق اللغوي

د. ذياب الراشد